بسم الله الرحمن الرحيم

وصلى الله على محمد وآله الطاهرين

نظریه انتخاب

تألیف:
دکتر مهدی رضا درویش زاده - آرمان رضایتی چران

انتشارات دانشگاه امام صادق(عليه‌السلام)
تهـران: بزرگراه شهیـد چمـران،
پل مدیریت
تلفکس:۸۸۳۷۰۱۴۲
صندوق پستی۱۵۹-۱۴۶۵۵
E-mail: isu.prcss@yahoo.com
فروشگاه اینترنتی:
www.kctabcsadiq.ir

نظریـــه انتخـــاب ■ تـــألیف: دکتـــر مهـــدی‌رضـــا درویـــش‌زاده و آرمـــان رضـــایتی
ناشـر: دانشـگاه امـام صـادق(ع) ■ چـاپ اول: ۱۳۹۴ ■ قیمـت: ۷۵۰۰۰ ریـال ■ شـمارگان: ۱۰۰۰ نسـخه
چاپ و صحافی: زلال کوثر ■ شابک: ۹۷۸۶۰۰۲۱۴۴۱۰۲

سرشناسه: درویش‌زاده، مهدی‌رضا، ۱۳۳۵ -
عنوان و نام پدیدآور: نظریه انتخاب/ تألیف مهدی‌رضا درویش‌زاده، آرمان رضایتی.
مشخصات نشر: تهران: دانشگاه امام صادق (ع)، ۱۳۹۳.
مشخصات ظاهری: ۱۷۸ ص.
فروست: انتشارات دانشگاه امام صادق (ع)؛ ۶۱۸: سیاست؛ ۶۷.
شابک: ۷۵۰۰۰ ریال : ۹۷۸۶۰۰۲۱۴۴۱۰۲
موضوع: نظریه بازی‌ها
موضوع: تصمیم‌گیری آماری
موضوع: انتخاب اجتماعی
شناسه افزوده: رضایتی چران، آرمان، ۱۳۶۵ -
شناسه افزوده: دانشگاه امام صادق (ع)
رده بندی کنگره: ۱۳۹۳ ۷ن ۴د/ ۲۶۹ QA
رده بندی دیویی: ۵۱۹/۳
شماره کتابشناسی ملی: ۳۶۷۳۰۳۵

فهرست مطالب

«بسم الله الرحمن الرحیم»

وَلَقَدْ ءَاتَيْنَا داوُودَ وَ سُلَيْمَنَ عِلْمًا و قَالا اْلْحَمْدُ لِلَّهِ اْلَّذِي فَضَّلَنَا عَلَي كَثِيرٍ مِنْ عِبَادِهِ اْلْمُؤْمِنِينَ

(قرآن کریم. سوره مبارکه النمل. آیه شریفه۱۵)

سخن ناشر

فلسفه وجودی **دانشگاه امام صادق**علیه‌السلام که ازسوی ریاست دانشگاه به کرات مورد توجه قرار گرفته، تربیت نیروی انسانی‌ای متعهد، باتقوا و کارآمد در عرصه عمل و نظر است تا از این طریق دانشگاه بتواند نقش اساسی خود را در سطح راهبردی به انجام رساند.

از این حیث «تربیت» را می‌توان مقوله‌ای محوری یاد نمود که وظایف و کارویژه‌های دانشگاه، در چارچوب آن معنا می‌یابد؛ زیرا که «علم» بدون «تزکیه» بیش از آنکه ابزاری در مسیر تعالی و اصلاح امور جامعه باشد، عاملی مشکل‌ساز خواهد بود که سازمان و هویت جامعه را متأثر و دگرگون می‌سازد.

از سوی دیگر «سیاست‌ها» تابع اصول و مبادی علمی هستند و نمی‌توان منکر این تجربه تاریخی شد که استواری و کارآمدی سیاست‌ها در گرو انجام پژوهش‌های علمی و بهره‌مندی از نتایج آنهاست. از این منظر پیشگامان عرصه علم و پژوهش، راهبران اصلی جریان‌های فکری و اجرایی به‌حساب می‌آیند و نمی‌توان آینده درخشانی را بدون توانایی‌های علمی - پژوهشی رقم زد و سخن از «مرجعیّت علمی» در واقع پاسخ‌گویی به این نیاز بنیادین است.

دانشگاه امام صادقعلیه‌السلام دررواقع یک الگوی عملی برای تحقق ایده دانشگاه اسلامی در شرایط جهان معاصر است. الگویی که هم‌اکنون ثمرات نیکوی آن در فضای ملی و بین‌المللی قابل مشاهده است. طبعاً آنچه حاصل آمده محصول نیّت خالصانه و جهاد علمی مستمر مجموعه بنیان‌گذاران و دانش‌آموختگان این نهاد است که امید می‌رود با اتکاء به تأییدات الهی و تلاش همه‌جانبه اساتید، دانشجویان و مدیران دانشگاه، بتواند به مرجعی تمام عیار در گستره جهانی تبدیل گردد.

معاونت پژوهشی دانشگاه امام صادقعلیه‌السلام باتوجه به شرایط، امکانات و نیازمندی جامعه در مقطع کنونی با طرحی جامع نسبت به معرفی دستاوردهای پژوهشی دانشگاه، ارزیابی سازمانی- کارکردی آن‌ها و بالاخره تحلیل شرایط آتی اقدام نموده که نتایج این پژوهش‌ها درقالب کتاب، گزارش، نشریات علمی و.... تقدیم علاقه‌مندان می‌گردد. هدف از این اقدام – ضمن قدردانی از تلاش خالصانه تمام کسانی که با آرمان و اندیشه‌ای بزرگ و ادعایی اندک در این راه گام نهادند- درک کاستی‌ها و اصلاح آنها است تا از این طریق زمینه پرورش نسل جوان و علاقه‌مند به طی این طریق نیز فراهم گردد؛ هدفی بزرگ که در نهایت مرجعیت **مکتب علمی امام صادق**علیه‌السلام را در گستره بین‌المللی به همراه خواهد داشت.(ان‌شاءالله)

ولله‌الحمد

معاونت پژوهشی دانشگاه

مقدمه مؤلفین

گرچه از زمان پیدایش نظریه بازی حدود هفتاد سال می‌گذرد ولی در دهه اخیر، استفاده از این نظریه در رشته‌های مختلف به‌ویژه در علوم سیاسی و روابط بین‌الملل، رشد شتابانی یافته است به‌گونه‌ای که ادبیات نظریه بازی در حال تبدیل شدن به یک فرهنگ عمومی در این رشته است. بدیهی است که غفلت از چنین تحولاتی باعث می‌شود که مراکز آکادمیک ما از استفاده از چنین ابزار قدرتمندی محروم شوند.

این کتاب جلد دوم از یک مجموعه سه جلدی است که برای دانشجویان علوم سیاسی و روابط بین‌الملل نگاشته شده است تا پیش‌نیاز لازم برای استفاده از نظریه بازی در تحلیل مسایل داخلی و بین‌المللی فراهم گردد. البته مطالب این کتاب به‌طور مستقل نیز به‌عنوان ابزارهایی متداول در تحلیل مسایل علوم سیاسی و سایر شاخه‌های علوم انسانی چون اقتصاد و علوم اجتماعی به‌کار می‌روند. به‌عنوان نمونه برخی از سرفصل‌های این کتاب در چارچوب نظریه تصمیم قرار دارند که نظریه‌ای با رویکرد احتمالاتی و آماری برای تحلیل مسأله تصمیم‌گیری است و همچنین بخش آخر کتاب به نظریه انتخاب اجتماعی می‌پردازد که نظریه‌ای مستقل در تحلیل مسایل مربوط به انتخابات است. البته هر دوی اینها خود به‌عنوان ابزار یا موضوع مورد مطالعه در ارتباط با نظریه بازی قرار می‌گیرند.

در جلد اول این مجموعه که با عنوان «ریاضیات کاربردی برای نظریه بازی در روابط بین‌الملل» نگاشته شد، به ریاضیات مورد نیاز برای فراگیری نظریه بازی توسط دانشجویان علوم سیاسی و روابط بین‌الملل پرداختیم و در این کتاب به مهمترین عنصر یک بازی غیرهمکارانه یعنی نحوه انتخاب یک فرد(یک بازیگر) می‌پردازیم، در واقع در تشکیل مدل یک بازی غیرهمکارانه بسته به نوع مدل باید عناصرمختلفی چون مجموعه بازیگران، مجموعه انتخاب‌های هر بازیگر و ... را به‌طور مجرد مشخص کرد. یکی از این عناصر که تعیین آن در تشکیل هر مدلی از بازی‌های غیرهمکارانه اساسی می‌باشد، روابط ارجحیت و مفهوم معادل آن یعنی توابع مطلوبیت است. این روابط نحوه اولویت‌بندی هر بازیگر را نسبت به شرایط مختلفی که ممکن است در اثر انتخاب‌های وی و سایر بازیگران پیش بیاید مشخص می‌کند و بر همین مبنا نیز جواب مسأله و سایر تحلیل‌های مربوط به مسأله مشخص می‌گردد. موضوع اصلی این کتاب روابط ارجحیت می‌باشد و در فصل‌های مختلف آن به چگونگی این روابط در شرایط مختلفی می‌پردازیم که در مسایل نظریه بازی‌ها با آنها روبرو خواهیم شد. و در جلد سوم به مدل‌های مختلف نظریه بازی خواهیم پرداخت.

مهدی رضا درویش زاده – آرمان رضایتی چران
(عضو هیئت علمی دانشگاه تهران)

بخش اول:

نظریه انتخاب

۱

نظریه انتخاب و روابط ارجحیت

رابطه ارجحیت

تصمیم‌گیران سیاسی همواره با مجموعه‌ای از انتخاب‌ها روبرو هستند که اتخاذ هر کدام پیامدی خاص را به‌دنبال دارد، بنابراین برای رسیدن به یک تصمیم نهایی باید قادر باشند تا بین این انتخاب‌های گوناگون مقایسه انجام داده و ارجحیت هر کدام از انتخاب‌ها را نسبت به سایر آنها مشخص کنند. به‌طور مثال فرض کنید یک رهبر سیاسی در موقعیتی خاص با این مجموعه از انتخابها روبرو می‌شود:

{ مذاکره، قطع رابطه، گزینه نظامی}.

انتخاب هر کدام از این گزینه‌ها پیامد جداگانه‌ای دارد که به ترتیب به صورت:

{ادامه وضعیت فعلی، فشارهای بین‌المللی، جنگ}، می‌باشد.

فرض کنید aRb به این معنی است که a بر b ارجحیت دارد. بنابراین بر طبق پیامدهای بیان شده در مثال به‌طور نمونه داریم:

«گزینه نظامی R مذاکره»

و به همین ترتیب در مورد جفت‌های دیگر از انتخاب‌های فوق، این مقایسه‌ها قابل انجام است. البته قابلیت مقایسه بین انتخاب‌های گوناگون ویژگی مهمی است که

همواره ممکن است برقرار نباشد. این ویژگی «کامل بودن» نام دارد و رابطه‌ای که بتواند بین هر دو عضو این مقایسه را انجام دهد یک رابطه کامل گفته می‌شود.

هدف ما انتخاب بهترین گزینه از بین گزینه‌های موجود است، بنابراین علاوه بر مقایسه دوتایی آنها باید بتوانیم یک ترتیب کلی بین همه آنها برقرار کنیم. برای این منظور به خاصیت دیگری نیز نیاز داریم تا تضمین کند اگر انتخاب a بر انتخاب b و انتخاب b بر انتخاب c ارجحیت داشته باشد، آنگاه انتخاب a هم بر انتخاب c ارجح باشد. به بیان صوری اگر aRb و bRc آنگاه داشته باشیم aRc . به این ویژگی «تعدی» گفته می‌شود و رابطه‌ای که دارای این ویژگی باشد، متعدی نامیده می‌شود.

از آنچه تاکنون گفته شد می‌توان دریافت که مسأله‌ای که ما با آن روبرو هستیم ایجاد یک ترتیب روی مجموعه‌ای از انتخاب‌ها با توجه به مطلوبیت‌های ماست تا بدین طریق بتوانیم انتخاب نهایی را که بهینه‌ترین انتخاب‌ها برای ما می‌باشد انجام دهیم. بنابراین اگر به تجرید مسأله بپردازیم آنچه به‌دست خواهیم آورد مسأله‌ای درباره یک مجموعه و یک رابطه دوتایی روی آن مجموعه است. حال از این نظرگاه تعاریف فوق را با زبان صوری و ریاضی بازتعریف می‌نماییم.

مانند قبل فرض کنید R نشان دهنده‌ی یک رابطه دوتایی باشد (توجه کنید که ما هنوز یک رابطه دوتایی را تعریف نکرده‌ایم و فعلاً از همان توصیفات شهودی که برای یک رابطه دوتایی ارائه کردیم استفاده می‌کنیم) و اگر a و b تحت R با هم رابطه داشته باشند یا به‌عبارتی داشته باشیم aRb می‌توانیم این رابطه را به شکل دیگری نیز نمایش دهیم و آن عبارتست از زوج مرتب (a, b). توجه کنید که ترتیب در این نمایش اهمیت دارد. بنابراین رابطه R را می‌توان به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب در نظر گرفت که مؤلفه اول آنها با مؤلفه دوم، رابطه R را دارا می‌باشد.

تعریف ۱-۱: فرض کنید A و B دو مجموعه باشند ضرب دکارتی A و B که با $A \times B$ نمایش داده می‌شود عبارتست از مجموعه تمامی زوج‌های مرتبی که مؤلفه اولشان عضو A و مؤلفه دومشان عضو B می‌باشد. به عبارت دیگر:

$$A \times B = \{\, (a,b) | a \in A \,, b \in B \,\}$$

به همین ترتیب $A \times A$ نیز تعریف می‌شود و آن مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است که هر دو مؤلفه آن از اعضای A می‌باشند به‌عبارت دیگر:

$$A \times A = \{\, (a,b) | a, b \in A \,\}$$

به همین طریق می‌توان ضرب دکارتی n مجموعه را به ازای هر عدد طبیعی n تعریف کرد.

تعریف ۲-۱: اگر $A_1, A_2, \dots, A_n$ ، n مجموعه ناتهی باشند آنگاه ضرب دکارتی آنها با $\prod_{i=1}^{n} A_i$ نمایش داده می‌شود و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = \{\, (a_1, a_2, \dots, a_n) |\, a_i \in A_i \,, 1 \le i \le n \,\}$$

در واقع $\prod_{i=1}^{n} A_i$ عبارتست از همه n تایی‌های مرتبی که مؤلفه اول آن متعلق به A_1، مؤلفه دوم آن متعلق به A_2، ...، مؤلفه nام آن متعلق به A_n باشد.

تعریف ۳-۱: فرض کنید $A_1, A_2, \dots, A_n$ ، n مجموعه ناتهی و $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ عضوی از $\prod_{i=1}^{n} A_i$ باشد آنگاه a_{-i} را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$a_{-i} = (a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

یعنی برداری $(n-1)$ تایی که از حذف مؤلفه iام a بدست می‌آید.

این تعریف مقدمه‌ای برای تعریف مفهوم رابطه است.

تعریف ٤-۱: یک رابطه R از A به B عبارتست از یک زیرمجموعه از مجموعه‌ی $A \times B$. در واقع هر زیرمجموعه از مجموعه $A \times B$ یک رابطه‌ی دوتایی است.

- اگر زوج مرتبی چون (a,b) در R باشد بدین معنی است که aRb .
- هر زیرمجموعه از $A \times A$ یک رابطه روی A نامیده می‌شود.

٭توجه کنید که طبق گفته‌های بالا xRy با $(x,y) \in R$ معادل است.

*عدم برقراری رابطه xRy را با $\sim(xRy)$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۱–۱: فرض کنید مجموعه تصمیماتی که یک رهبر سیاسی در یک انتخابات پارلمانی با آنها روبروست عبارتست از

$$A = \left\{ \text{ائتلاف با حزب X ، ائتلاف با حزب } Y \text{ ، عدم ائتلاف} \right\}$$

و ارجحیت‌های وی با توجه به شرایط سیاسی حاکم به شرح زیر باشد:

- ائتلاف با حزب X ارجح است بر ائتلاف با حزب Y
- ائتلاف با حزب Y ارجح است بر عدم ائتلاف
- ائتلاف با حزب X ارجح است بر عدم ائتلاف

بنابراین اگر رابطه‌ی ارجحیت این شخص را با R نمایش دهیم R عبارتست از مجموعه زیر

$$R = \{\left(\text{ائتلاف با } X \text{ ، ائتلاف با } Y\right), \left(\text{ائتلاف با } Y \text{ ، عدم ائتلاف}\right), \left(\text{ائتلاف با } X \text{ ، عدم ائتلاف}\right)\}$$

بنابر آنچه گفته شد بطور مثال وجود $\left(\text{ائتلاف با } X \text{ ، ائتلاف با } Y\right)$ در R به معنی «ائتلاف با X R Y ائتلاف با» می‌باشد.

حال به بیان برخی از ویژگی‌های یک رابطه دوتایی می‌پردازیم که در تعریف یک رابطه ارجحیت به آنها نیازمندیم.

تعریف ۵–۱: (کامل بودن): رابطه R روی مجموعه A کامل گفته می‌شود اگر برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم aRb یا bRa .

مثال۲–۱: فرض کنید مجموعه A خانواده‌ای باشد که از یک پدر یک مادر یک دختر و یک پسر تشکیل شده است رابطه R را بین اعضای این خانواده به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$\forall a, b \in A$ می‌گوییم aRb اگر و فقط اگر a و b هم جنس باشند و b با a همسن یا بزرگ‌تر از او باشد.

این رابطه یک رابطه کامل نیست زیرا به‌طور مثال در آن پدر و مادر با هم رابطه ندارند. به‌عبارت دقیق‌تر اگر مجموعه A را به شکل زیر نمایش دهیم:

$$A = \{\text{پدر،مادر،دختر،پسر}\}$$

آنگاه رابطه R به شکل زیر قابل نمایش است:

$$R = \Big\{\Big(\text{پسر , پدر}\Big), \Big(\text{دختر ,مادر}\Big)\Big\}$$

همان‌طور که می‌بینید زوج مرتبی چون (مادر ,پدر) که از اعضای A تشکیل شده در R قرار ندارد.

تعریف ٦-۱: (متعدی بودن): فرض کنیم A یک مجموعه و R یک رابطه روی آن باشد اگر برای هر $a, b, c \in A$ که aRb و bRc داشته باشیم aRc آنگاه می‌گوییم R یک رابطه متعدی است.

هر رابطه‌ای لزوماً متعدی نیست به‌طور مثال:

مثال ۳-۱: فرض کنید B مجموعه احزاب دارای کرسی در یک پارلمان باشند. به ازای دو حزب $a, b \in B$ می‌گوییم aRb اگر و فقط اگر حزب a حاضر به ائتلاف با حزب b باشد. فرض کنید حزب a مایل به ائتلاف با b باشد و حزب b نیز حاضر به ائتلاف با حزب دیگری به نام c باشد اما حزب a تمایلی به ائتلاف با حزب c نداشته باشد بنابراین R یعنی رابطه ائتلاف در پارلمان یاد شده متعدی نخواهد بود

تعریف ۷-۱: (بازتابی بودن): رابطه R را روی مجموعه A بازتابی گوییم هرگاه برای هر $a \in A$ داشته باشیم aRa .

مثال ٤-۱: مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ را با دو رابطه $>$ و $\leq$ در نظر بگیرید که در اولی $a > b$ اگر a بزرگ‌تر از b باشد و در دومی $a \geq b$ اگر a بزرگ‌تر از b یا مساوی آن باشد، می‌توان مشاهده کرد که اولی بازتابی نیست اما دومی بازتابی است زیرا برای این‌که اولی بازتابی باشد باید برای هر عدد حقیقی چون a داشته باشیم $a > a$ که به این معنی است که a از خودش بزرگ‌تر است که بی‌معنا می‌باشد. اما دومی

بازتابی است زیرا هر عددی با خودش برابر می‌باشد پس یکی از شروط کافی برقراری رابطه برقرار است بنابراین هر عدد حقیقی تحت $\leq$ با خودش در رابطه است.

تعریف ۸–۱: (پادمتقارن بودن) : رابطه R را روی مجموعه A پاد متقارن گوییم هرگاه از برقراری همزمان aRb و bRa داشته باشیم $a = b$.

مثال ۵–۱ : مجموعه A را مجموعه کاندیداهای متفاوت شرکت‌کننده در یک انتخابات در نظر بگیرید، رابطه R را روی این مجموعه به این صورت تعریف می‌کنیم که برای هر دو کاندیدای a, b ، aRb اگر و فقط اگر تعداد آرای a بیشتر از تعداد آرای b یا برابر با آن باشد، بنابراین اگر دو عضو متمایز از A (یعنی دو کاندیدای متمایز) چون a و b تعداد آرای برابر داشته باشند آنگاه هر دوی aRb و bRa برقرارند اما $a = b$ برقرار نیست. بنابراین این یک رابطه غیر پادمتقارن است (توجه داشته باشید که غیر پادمتقارن بودن لزوماً به‌معنای متقارن بودن نیست).

تعریف ۹–۱: (نامتقارن بودن): رابطه R را روی مجموعه A نامتقارن گوییم هرگاه اگر xRy آنگاه $\sim(yRx)$ یا به‌عبارت دیگر اگر $(x, y) \in R$ آنگاه $(y, x) \notin R$.

البته خواص دیگری نیز در مطالعه رابطه‌ها مطرح می‌شوند که برخی را در آینده و به اقتضای نیازمان معرفی خواهیم کرد و به برخی دیگر هم به‌دلیل عدم نیاز در طول این کتاب اشاره‌ای نخواهیم کرد[۱].

تعریف ۱۰–۱: رابطه دوتایی R را روی مجموعه A یک ترتیب جزیی می‌نامیم هرگاه متعدی، بازتابی و پاد متقارن باشد.

واژه جزیی به این دلیل اینجا به‌کار رفته است که ممکن است دو عضو در مجموعه زمینه رابطه مورد نظر ما وجود داشته باشد که این رابطه نتواند بین آنها سنجشی انجام دهد. به‌عبارت دیگر زوج مرتب‌های متشکل از آنان در رابطه مورد نظر نباشند.

تعریف ۱۱-۱: هرگاه R یک ترتیب جزیی روی مجموعه‌ای چون A باشد به‌طوریکه از شرط کامل بودن برخوردار باشد آنگاه R را یک رابطه ترتیب کلی یا رابطه ارجحیت می‌گوییم. به این نوع روابط، روابط خطی نیز گفته می‌شود.

مثال ۶-۱: رابطه $\leq$ روی اعداد حقیقی یک رابطه ارجحیت است.

مثال۷-۱: در مثال ۱ از آنجا که هر انتخاب با خودش معادل است بنابراین می‌توانیم تمامی جفت‌های به شکل (a,a) به ازای هر $a \in A$ را هم به R اضافه کنیم. بنابراین می‌توانیم R را به‌صورت زیر بازنویسی کنیم:

$R = \{$(ائتلاف با Y، ائتلاف با X)، (عدم ائتلاف، ائتلاف با Y)، (عدم ائتلاف، ائتلاف با X)، (ائتلاف با X، ائتلاف با X)،
(ائتلاف با Y، ائتلاف با Y)، (عدم ائتلاف، عدم ائتلاف)$\}$

حال ویژگی‌هایی را که برای رابطه‌ها بیان کردیم در این مثال بررسی می‌کنیم.

کامل بودن: این ویژگی برقرار است زیرا برای هر دو انتخاب متمایز از مجموعه‌ی انتخاب‌های A ، R قادر به مقایسه می‌باشد.

متعدی بودن: این ویژگی نیز به وضوح برقرار می‌باشد.

بازتابی بودن: این ویژگی نیز با توجه به نمایش اخیر R و توضیحات قبل از آن برقرار است.

پاد متقارن بودن: این ویژگی نیز برقرار است، زیرا هیچ $a,b \in A$ وجود ندارد که هر دوی (a,b) و (b,a) در R باشند.

بنابراین R یک رابطه‌ی ارجحیت است.

در حال حاضر رابطه ارجحیت را به‌صورت یک رابطه دقیق ریاضی تعریف کرده‌ایم و آنچه در ادامه کار در پیش داریم، یافتن بهترین انتخاب با توجه به رابطه ارجحیتی است که در دست داریم و این‌که در چه شرایطی می‌توان مطمئن بود که چنین گزینه‌ای در بین گزینه‌های مطرح موجود است.

ابتدا به مواردی که در آنها مجموعه انتخاب‌هایمان متناهی است می‌پردازیم و سپس به سراغ مواردی می‌رویم که در آنها مجموعه‌های انتخابمان یک پیوستار باشد.

تعریف ۱۲-۱: اگر X یک مجموعه و R یک رابطه ارجحیت روی آن باشد، $x \in X$ را یک عضو ماکسیمال تحت R گوییم، هرگاه برای هر $y \in X$ داشته باشیم xRy. به‌عبارت دیگر x را یک عضو ماکسیمال گوییم هرگاه هیچ عضو دیگر A بر آن ارجح نباشد.

در مورد مجموعه‌های متناهی قضیه زیر برقرار است:

قضیه ۱-۱: اگر X یک مجموعه متناهی و R یک رابطه ارجحیت روی X باشد آنگاه R روی X یک عضو ماکسیمال دارد.

عضو ماکسیمال در واقع عنوان رسمی همان بهترین انتخاب است که ما در پی آنیم. در واقع ما به مرحله‌ای رسیدیم که می‌خواهیم بهترین انتخاب را به‌صورت رسمی تعریف کنیم.

بنابراین معنای قضیه‌ی فوق اینست که در مجموعه‌های متناهی از انتخاب‌ها و تحت یک رابطه ارجحیت همواره یک انتخاب ارجح بر سایر انتخاب‌ها وجود دارد البته ممکن است این انتخاب یکتا نباشد.

اثبات: قضیه فوق را با استفاده از استقرا [۲] روی تعداد اعضای X اثبات می‌کنیم:

گام اول: فرض کنید X یک مجموعه تک عضوی مانند $X = \{x\}$ و R یک رابطه ارجحیت روی آن باشد در این صورت عضو ماکسیمال X همان x خواهد بود چون هیچ عضو دیگری وجود ندارد که بر x ارجح باشد. پس در این حالت عضو ماکسیمال وجود دارد.

گام دوم: فرض کنید برای تمام مجموعه‌های با n عضو و تمام روابط ارجحیت روی آنها حکم برقرار باشد ثابت می‌کنیم برای مجموعه‌های با $n + 1$ عضو نیز حکم برقرار است.

فرض کنیم X یک مجموعه $n+1$ عضـوی و R یـک رابطـه ارجحیـت روی آن باشد. عضو دلخواهی از X چون x را انتخاب می‌کنیم میدانیم با برداشتن این عضو از X به یک مجموعه n عضوی می‌رسیم، ایـن مجموعـه جدیـد را $\acute{X}$ نـام‌گـذاری مـی‌کنـیم بنابراین داریم:

$$X = \acute{X} \cup \{x\}$$

روی $\acute{X}$ هم یک رابطه ارجحیت $\acute{R}$ را داریم که عبارتست از تحدیـد R بـه $\acute{X}$. در واقع $\acute{R}$ شامل آن دسته از زوج مرتب‌های R است که هر دو مؤلفـه آنهـا از اعضـای $\acute{X}$ می‌باشند یا به‌عبارت ساده‌تر $\acute{R}$ همـان R اسـت کـه تنهـا بـین اعضـای $\acute{X}$ بـه مقایسـه می‌پردازد. می‌توان به‌سادگی نشان داد که $\acute{R}$ یک رابطه ارجحیت روی $\acute{X}$ می‌باشد.

بنابراین با توجه به فرض استقرا و این‌که $\acute{X}$ یک مجموعه n عضوی مـی‌باشـد. $\acute{X}$ دارای یک عضو ماکسیمال مانند y است. از آنجا که y در X نیز قرار دارد و با توجه بـه کامل بودن R حداقل یکی از موارد xRy یا yRx برقرارند. اگـر داشـته باشـیم xRy از آنجا که y در $\acute{X}$ ماکسیمال است پس به ازای هر $z \in \acute{X}$ داریم $y\acute{R}z$ که این خود معادل است با این‌که yRz حال با استفاده از متعدی بودن R داریم xRz. پس x یک عضـو ماکسیمال X است. اگر بخواهیم به زبانی توصـیفی اسـتدلال فـوق را بیـان کنـیم بایـد بگوییم به‌خاطر این‌که y بر هر عضو X غیر از x ارجح است و چون x هم بر y ارجح است پس x بر هر عضو X ارجحیت دارد پس x یک عضو ماکسیمال X می‌باشد.

در حالت بعدی اگر داشـته باشـیم yRx آنگـاه بـاز بـا توجـه بـه این‌کـه y در $\acute{X}$ ماکسیمال است و این خود به این معنی است که بـه ازای هـر $z \in \acute{X}$ داریـم $y\acute{R}z$ کـه معادل است با yRz پس به ازای هر $a \in X$ داریم yRa پس y یک عضو ماکسیمال X است.

حالت آخر زمانی است که هر دوی xRy و yRx برقرار باشند که با توجه به خاصیت پادتقارنی R نتیجه می‌گیریم $x = y$ پس هر دوی x و y عضو ماکسیمال خواهند بود.

پس در هر صورت دیدیم که عضو ماکسیمال وجود دارد و بدین ترتیب قضیه اثبات می‌شود.

فضاهای انتخاب پیوسته

گاهی اوقات گزینه‌ها از مجموعه‌هایی چون مجموعه اعداد حقیقی انتخاب می‌شوند. به‌طور مثال انتخاب یک زمان مشخص برای عملی کردن یک تصمیم خاص یا تصمیم‌گیری برای انتخاب میزان کمک‌های مالی که می‌خواهیم در یک مسأله خاص به شخص یا گروه یا کشوری اختصاص دهیم. در مثال اول ما با انتخاب یک عدد روی محور زمان روبرو هستیم این عدد می‌تواند در هر کجای این محور قرار بگیرد، به‌عبارت دیگر تصمیم ما ممکن است در هر زمانی از شبانه روز یا ماه و سال صورت بگیرد، می‌دانیم که زمان به‌طور پیوسته در حال تغییر است و بین لحظات متوالی زمانی گسستگی و انفصال وجود ندارد. در مورد تصمیم‌گیری برای میزان هزینه نیز همین‌طور است. ما با توجه به توان مالی و قید اثربخشی می‌توانیم هر مقداری را برای انجام این هزینه انتخاب نماییم و لزوماً این مقدار تحت ترتیبی چون ترتیب اعداد طبیعی تغییر نمی‌کند و می‌تواند هر مقداری بین دو عدد طبیعی را نیز داشته باشد.

منظور از فضای پیوسته برای تصمیم‌گیری اینچنین فضاهایی می‌باشد. گاهی اوقات این فضاها می‌توانند بیکران باشند و گاهی اوقات کراندار و محدود به حدودی مشخص. به‌طور نمونه در مثال اول که در اینجا بیان کردیم زمانی را که می‌خواهیم برای عملی کردن تصمیم خود انتخاب کنیم عملاً محدود و کراندار است، زیرا نقطه شروع آن تا حدی مشخص است و اگر دقیقاً مشخص نباشد معمولاً زمانی را سراغ داریم که قبل از آن چنین تصمیمی نداشته‌ایم. بنابراین یک کران پایین برای این تصمیم‌مان در

دست داریم. و از طرفی معمولاً در شرایط واقعی برای بسیاری از تصمیمات یک حداکثر زمانی وجود دارد که بعد از آن دیگر تصمیم مورد نظر بی‌اثر خواهد بود. پس در خیلی از موارد این مثال دارای کران بالا نیز خواهد بود. به همین ترتیب در مورد مثال دوم میزان هزینه به سقف بودجه و توان مالی ما برخورد می‌کند و از طرفی به حداقلی برای مؤثر بودن نیز نیاز دارد. پس در این مورد نیز مجموعه‌ی پیوسته‌ی انتخاب ما محدود است. این مفاهیم در ادامه به‌صورت فرمال و دقیق بیان خواهند شد و در ادامه‌ی بررسی مسأله انتخاب و تعیین انتخاب بهینه، در فضاهای پیوسته مورد استفاده قرار خواهند گرفت.

هنگامی‌که قدم به عرصه مجموعه‌های نامتناهی و پیوسته می‌گذاریم، شرط‌هایی که در قضیه قبل وجود انتخاب ارجح و عضو ماکسیمال را تحت روابط ارجحیت تضمین می‌کردند، دیگر لزوماً اینچنین نتایجی را به‌دنبال نخواهند داشت به‌عنوان نمونه، مثال زیر را در نظر بگیرید:

مثال ۸-۱: فرض کنید $X = (0,1)$ ، مجموعه‌ی تمام اعداد حقیقی بزرگ‌تر از صفر و کوچک‌تر از ۱ باشد و رابطه ارجحیت مورد نظر، همان رابطه ترتیب $\leq$ روی اعداد حقیقی باشد، در این صورت می‌توان نشان داد که X فاقد عضو ماکسیمال است.

برای نشان دادن این ادعا، فرض کنید $x \in X$ یک عضو ماکسیمال باشد. بنابراین $x < 1$ است که:

نتیجه می‌دهد $\quad 1 - x > 0$

قرار می‌دهیم $\quad y = x + \frac{1-x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{x}{2}$

چون $x < 1$ پس $\frac{x}{2} < \frac{1}{2}$ بنابراین:

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \Rightarrow y < 1$$

و چون $y = x + \frac{1-x}{2} > 0 + x = x$ پس $0 < x < y < 1$. بنابراین عددی چون y در $(0,1)$ پیدا کرده‌ایم که از x بزرگ‌تر است. پس x عضو ماکسیمال نیست.

به‌عبارت دیگر برای هر $x \in (0,1)$ می‌توان yای در $(0,1)$ یافت که $y > x$ پس هیچ عددی در $(0,1)$ ماکسیمال نیست.

حال اگر به‌جای مجموعه‌ی $(0,1)$ مجموعه‌ی $[0,1]$ را در نظر بگیریم که تنها دو عضو از $(0,1)$ بیشتر دارد ($[0,1] = (0,1) \cup \{0,1\}$) مسأله عوض می‌شود. در واقع مجموعه دوم عضو ماکسیمال دارد و آن هم عبارتست از $\{1\}$. پس آنچه در این مثال دیده می‌شود این است که نوع مجموعه در اینجا نقش اساسی دارد. بنابراین باید به‌دنبال خواصی از مجموعه‌ها گشت که برقراری آن شرط، وجود عضو ماکسیمال را تضمین کند.

البته همان‌طور که در مثال بعدی خواهیم دید لزوماً شکل مجموعه نمی‌تواند به تنهایی وجود عضو ماکسیمال را تعیین کند و برخی مجموعه‌ها که تحت برخی از روابط ارجحیت دارای عضو ماکسیمال هستند تحت برخی دیگر از روابط ارجحیت فاقد عضو ماکسیمال می‌باشند. بنابراین ویژگی‌های یک رابطه ارجحیت نیز در تعیین وجود یا عدم وجود عضو ماکسیمال مؤثر است.

مثال ۹–۱: فرض کنید $X = [0,1]$ و رابطه R روی X به این صورت تعریف شده باشد که xRy اگر:

$$\max\{x,y\} \leq \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad x \geq y$$

یا

$$\min\{x,y\} > \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad x \leq y$$

یا

$$x > \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad y \leq \frac{1}{2}$$

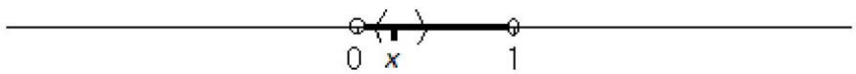
این رابطه عضو ماکسیمال ندارد. طبق فرض آخر، تمام اعداد بزرگ‌تر از $\frac{1}{2}$ بر تمام اعداد کوچک‌تر یا مساوی $\frac{1}{2}$ ارجحیت دارند. بنابراین برای یافتن عضو ماکسیمال باید در $(\frac{1}{2},1]$ جستجو کنیم. اما طبق شرط دوم در این بازه ارجح‌ترین عضو، کوچک‌ترین

عضو است، اما این مجموعه کوچک‌ترین عضو ندارد. پس در اینجا عضو ماکسیمال وجود ندارد.

برخی از خواص مجموعه‌ها

در این بخش به معرفی برخی از خواص مجموعه‌ها پرداخته و برای شروع، مفهوم باز بودن یک مجموعه را تعریف می‌کنیم.

همان‌طور که قبلاً اشاره کردیم، بازه‌ی $(0,1)$ نمایش‌دهنده‌ی تمام اعداد حقیقی بین صفر و یک می‌باشد. نمایش هندسی این بازه را روی محور اعدادحقیقی در نظر می‌گیریم.



شکل ۱–۱: نمودار بازه $(0,1)$

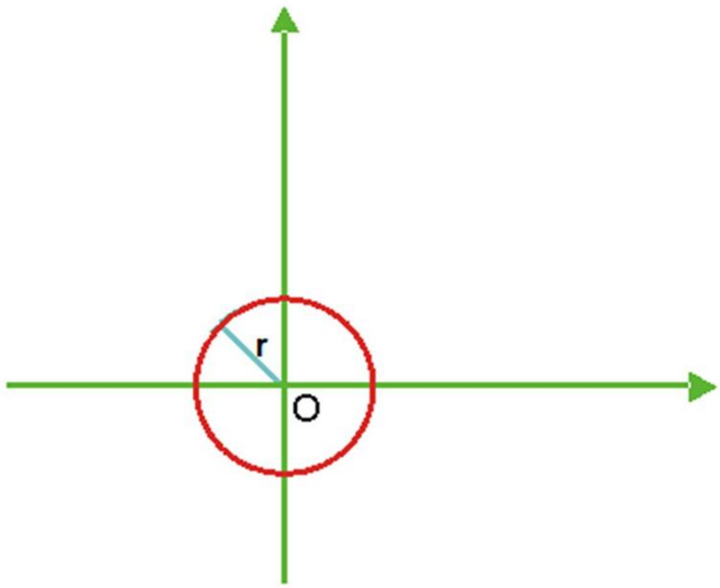
همان‌طور که ملاحظه می‌کنید به ازای هر $x \in (0,1)$ می‌توان یک بازه‌ی پیوسته از نقاط $(0,1)$ حول x پیدا کرد. به‌عبارت دیگر به ازای هر عضو x در $(0,1)$ فاصله مناسبی وجود دارد که اگر در محدوده آن فاصله، در طرفین x حرکت کنیم همواره در $(0,1)$ هستیم. در واقع این خاصیت از آنجا ناشی می‌شود که برای هر $x \in (0,1)$ همیشه دو عضو در $(0,1)$ وجود دارند که یکی بزرگ‌تر از x و دیگری کوچک‌تر از آن است. وجود عضو بزرگ‌تر را در مثال ٤–١ دیدیم. به چنین مجموعه‌هایی مجموعه‌های باز می‌گویند. در ادامه مطلب این مفاهیم را به شکل دقیق‌تری تعریف خواهیم کرد.

تعریف ۱۳–۱: اگر $x \in \mathbb{R}$ باشد یک همسایگی باز حول x به شعاع ε را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

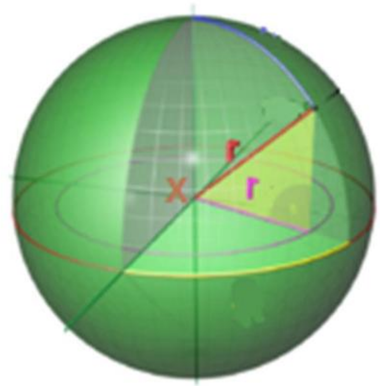
$$B_{\varepsilon}(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid |x - y| < \varepsilon\}$$

به‌عبارت دیگر همسایگی باز به شعاع ε حول x تمام اعداد حقیقی طرفین x هستند که فاصله‌شان با x کمتر از ε است.

در تصاویر زیر نمونه‌هایی از همسایگی‌هایی از x به شعاع r به ترتیب در بعد ۲ و ۳ ارائه شده‌اند:



شکل ۲-۱: همسایگی به شعاع r در فضای دو بعدی



شکل ۳-۱: همسایگی به شعاع r در فضای سه بعدی

این مفهوم و مفاهیم دیگری که در ادامه خواهیم آورد بستگی اساسی به تعریف مفهوم فاصله دارند. بنابراین در هر فضایی اگر بتوانیم مفهوم فاصله را با ضوابطی دقیق و مشابه آنچه در این مورد (فضای اعداد حقیقی و فاصله تعریف شده با قدر مطلق) وجود دارد، تعریف کنیم می‌توانیم مفهوم همسایگی و سایر مفاهیمی که در ادامه خواهند آمد را به آنها هم تعمیم دهیم[۳].

تعریف ۱۴-۱: مجموعه $A \subseteq \mathbb{R}$ را باز گویند هرگاه برای هر $x \in A$ یک همسایگی باز مانند $B_\mathcal{E}(x)$ وجود داشته باشد که $B_\mathcal{E}(x) \subseteq A$.

مثال ۱۰-۱: فاصله $(0,1)$ باز است

برای سادگی، ابتدا مسأله را به‌صورت هندسی مطرح می‌کنیم. نمایش هندسی بازه $(0,1)$ را دوباره در نظر بگیرید:

یک عضو دلخواه x را از آن انتخاب کنید. فواصلی که x با 0 و 1 دارد را در نظر گرفته و آن‌را که کمتر است انتخاب کنید. به‌طور مثال فرض کنید فاصله‌ی x با صفر کمتر از فاصله‌اش با ۱ باشد. این فاصله را $\acute{\mathcal{E}}$ بنامید.

حال این فاصله را نصف کرده آن را $\mathcal{E}$ بنامید و با اندازه $\mathcal{E}$ در طرفین x حرکت کنید. بازه‌ی به‌دست آمده بدون کرانه‌هایش یک همسایگی به شعاع $\mathcal{E}$ حول x است که کاملاً در $(0,1)$ قرار دارد. بنابراین برای هر x دلخواه یک همسایگی پیدا کردیم که در $(0,1)$ قرار دارد پس فاصله $(0,1)$ باز است.

حال اثبات فوق را به‌طور فرمال بیان می‌کنیم: فرض کنید $x \in (0,1)$ و قرار دهید:

$$\mathcal{E}_1 = x - 0 = x$$
$$\mathcal{E}_2 = 1 - x$$

همچنین قرار دهید:

$$\acute{\mathcal{E}} = \min\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2\}$$

و

$$\mathcal{E} = \frac{\acute{\mathcal{E}}}{2}$$

همسایگی $B_{\mathcal{E}}(x)$ را در نظر بگیرید. نشان می‌دهیم: $B_{\mathcal{E}}(x) \subseteq (0,1)$

$$y \in B_{\mathcal{E}}(x) \implies |x-y| < \varepsilon \implies -\varepsilon + x < y < \varepsilon + x$$

اگر $\acute{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_1$ آنگاه $\mathcal{E} = \frac{x}{2}$ بنابراین:

$$y > -\varepsilon + x = \frac{-x}{2} + x = \frac{x}{2} > 0$$

از طرفی $\acute{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_1$ به این معنی است که فاصله x از 0، کمتر از فاصله x از 1 می‌باشد پس $x < \frac{1}{2}$ بنابراین $\mathcal{E} = \frac{x}{2} < \frac{1}{4}$ پس:

$$y < \varepsilon + x < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} < 1$$

بنابراین: $0 < y < 1$ پس $B_{\mathcal{E}}(x) \subseteq (0,1)$

و اگر $\acute{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_2$ به طریق مشابه می‌توان اثبات کرد که $B_{\mathcal{E}}(x) \subseteq (0,1)$. پس نشان داده شد که بازه‌ی (0,1) باز است.

تعریف ۱۵-۱: فرض کنید M یک مجموعه و $A \subseteq M$ باشد متمم A نسبت به M را که با A^c نمایش می‌دهیم عبارتست از آن اعضایی از M که در A نباشند به بیان دیگر:

$$A^c = M \backslash A = \{x \in M | x \notin A\}$$

تعریف ۱۶-۱: مجموعه A را بسته نامیم هر گاه متمم‌اش باز باشد.

مثال ۱۱-۱: فاصله [0,1] یک مجموعه بسته است.

زیرا متمم فاصله [0,1] عبارتست از $B = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ که با روشی مشابه آنچه در مورد فاصله (0,1) انجام دادیم می‌توان نشان داد B باز است پس متمم آن یعنی [0,1] بسته می‌باشد.

مجموعه‌های بسته را نیز به‌طور مستقل و همانند مجموعه‌های باز می‌توان با استفاده از همسایگی‌ها تعریف کرد که به‌منظور اجتناب از پیچیدگی بحث از آوردن آن تعریف در اینجا خودداری می‌کنیم[٤].

بیشتر تعاریفی که تاکنون در این بخش آورده‌ایم روی فضای اعداد حقیقی یعنی $\mathbb{R}$ می‌باشند، اما همه‌ی این تعاریف قابل تعمیم به فضاهایی چون $\mathbb{R}^n$ نیز می‌باشد. $\mathbb{R}^n$ فضای حقیقی n بعدی است که در واقع مجموعه همه بردارهای n تایی است که هر مؤلفه‌اش یک عدد حقیقی می‌باشد. موارد استفاده از این n تایی‌های مرتب نیز به‌طور مثال در جاهایی می‌تواند باشد که ما همزمان با اتخاذ چند تصمیم مختلف درگیر هستیم و باید ارجحیت‌هایمان را روی نتایجی که از همه‌ی آنها حاصل می‌شود ترتیب دهیم، یا در مواقعی که در کنار تصمیم ما تصمیمات دیگرانی که با ما در یک تعامل یا تقابل مشترک هستند نیز در صورت گرفتن و رده‌بندی ارجحیت‌هایمان مؤثر است. در چنین مواردی ما باید به‌جای یک پارامتر، بردارهای متشکل از چندین مؤلفه را که هر مؤلفه یک پارامتر مؤثر است با هم مقایسه کنیم. بنابراین نیاز پیدا می‌کنیم نظریه ارجحیت‌ها را به فضاهایی چون $\mathbb{R}^n$ تعمیم دهیم. البته $\mathbb{R}^n$ تعمیمی از $\mathbb{R}$ است و بدیهی است که آنچه در مورد $\mathbb{R}^n$ به‌طور کلی گفته شود در مورد $\mathbb{R}$ نیز برقرار است.

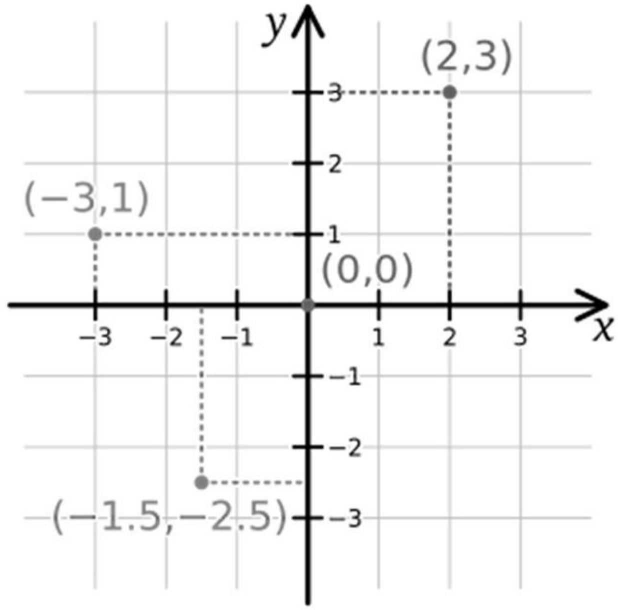
ابتدا تعاریف اولیه‌ای که در مورد $\mathbb{R}$ گفتیم را در مورد $\mathbb{R}^n$ بیان می‌کنیم و ادامه‌ی کار را در زمینه‌ی $\mathbb{R}^n$ دنبال می‌کنیم.

همان‌طور که پیش از این گفتیم بسیاری از تعاریف مورد نیاز در این بخش بر مفهوم فاصله استوار است، پس ابتدا سعی می‌کنیم فاصله را در $\mathbb{R}^n$ تعریف کنیم. البته پیش از این کار نیازمندیم $\mathbb{R}^n$ را به شکل دقیقی تعریف کنیم.

تعریف ۱۷-۱: $\mathbb{R}^n = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\ 1 \le i \le n \}$

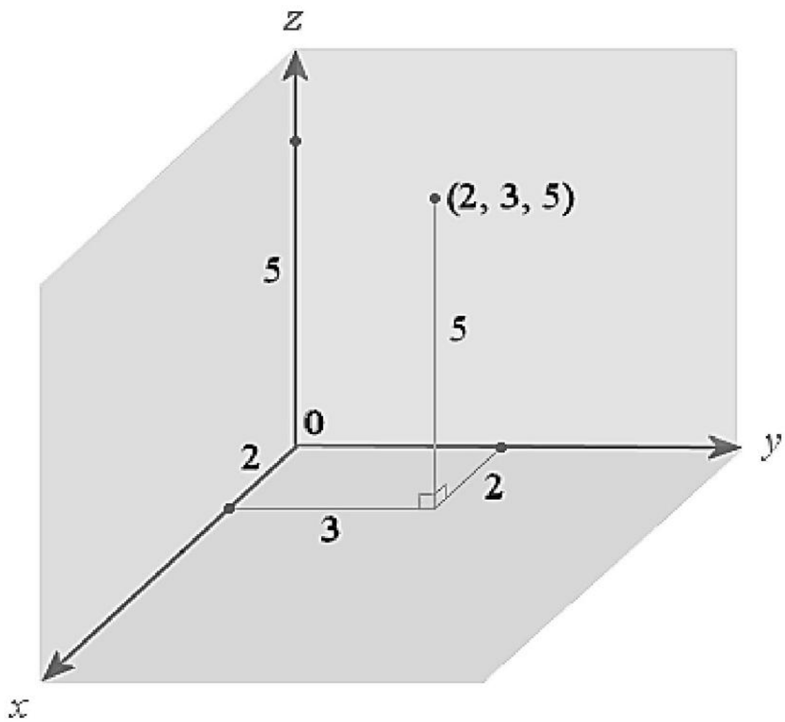
آنچه در تعریف فوق بیان کرده‌ایم شکل نمادین توضیحاتی است که پیش از آن ارائه کردیم. همان‌طور که مشاهده می‌کنید $\mathbb{R}^n$ مجموعه همه n تایی‌های مرتبی است

که هر مؤلفه از این n تایی‌ها یک عدد حقیقی است. از فضاهای حقیقی آنچه بـرای مـا آشناست فضاهای حقیقی با بعد یک، دو و سه یعنـی $\mathbb{R}$، $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ می‌باشـند. فضـای حقیقی با بعد یک یا همان $\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی می‌باشد. اعدادی چون ۰ ، ۱ ، ۷− ، ... که اعداد صحیح هستند یا اعدادی چون $\frac{1}{5}$، $\frac{-1}{1000}$ که اعداد گویـا هسـتند و یـا اعـدادی چون $\sqrt{2}$، π، و یا عدد نپر که اعداد گنگ هستند، همه اینها از اعـداد حقیقـی هسـتند. فضای حقیقی دو بعدی یا همان $\mathbb{R}^2$ مجموعه‌ایست که هر عضـو آن یـک زوج مرتـب است و هر مؤلفه این زوج مرتب خود یک عدد حقیقی است، برای نمایش هندسی این مجموعه از دو محور مختصات عمود بر هم استفاده می‌کنند کـه هـر کـدام از محورهـا برای نمایش یکی از مؤلفه‌های زوج مرتب‌ها استفاده می‌شود، از اعضای $\mathbb{R}^2$ می‌توان به منظور نمایش مفاهیمی که دارای دو بعد می‌باشـند، اسـتفاده کـرد. بـه‌طور مثـال بـرای نمایش طول و عرض جغرافیایی یک نقطه یا برای نمایش همزمان قد و وزن اشـخاص در یک جامعه آماری یا.... . تصویر زیر یک نمایش هندسی از چند نقطه در $\mathbb{R}^2$ را ارائه می‌دهد.



شکل ٤-۱: نمایش نقاط در دستگاه مختصات دو بعدی

$\mathbb{R}^3$ نیز فضای حقیقی سه بعدی می‌باشد که در آن هر عضو ۳ مؤلفه دارد که هر مؤلفه آن یک عدد حقیقی است، فضای فیزیکی اطراف ما که در آن زندگی می‌کنیم یک فضای سه بعدی است که دارای سه مؤلفه طول، عرض و ارتفاع می‌باشد. تصویر زیر نمایش هندسی یک نقطه از $\mathbb{R}^3$ را در دستگاه محورهای مختصات ۳ بعدی ارائه می‌دهد.



شکل ۵-۱: نمایش نقاط در فضای سه بعدی

حال به مفهوم فاصله در $\mathbb{R}^n$ می‌پردازیم.

بدین‌منظور تعاریف مختلفی را می‌توان به‌عنوان فاصله در $\mathbb{R}^n$ مطرح کرد. ما در اینجا تعریفی از فاصله را ارائه می‌کنیم که براساس مفهومی به نام نرم $(Norm)$ شکل می‌گیرد.

تعریف ۱۸-۱: برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ نرم x را با $\|x\|$ نمایش داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

که در آن $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

مثال ۱۲-۱: فرض کنید $x = (1,0,\frac{1}{2})$ نقطه‌ای در $\mathbb{R}^3$ باشد $\|x\|$ برابر است با:

$$\|x\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

تعریف ۱۹-۱: برای هر دو نقطه $x, y \in \mathbb{R}^n$ فاصله آن دو را با $\|x - y\|$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

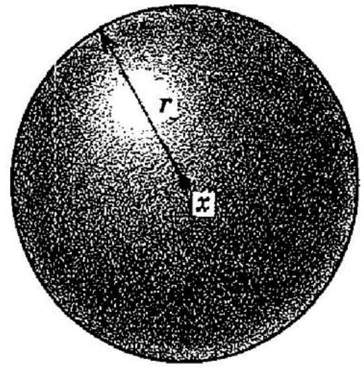
که در آن $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ و $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

حال که مفهوم فاصله را تعریف کردیم گام اساسی را برای تعریف مجموعه‌های باز و بسته برداشته‌ایم. منتهی پیش از آن‌که به آنها بپردازیم باید مفهوم همسایگی باز یا به‌عبارت دیگر گوی باز را در $\mathbb{R}^n$ تعریف کنیم.

تعریف ۲۰-۱: فرض کنیم $x \in \mathbb{R}^n$ یک گوی باز حول x و به شعاع ε در $\mathbb{R}^n$ را با $B_\varepsilon(x)$ نمایش داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$B_\varepsilon(x) = \{\, y \in \mathbb{R}^n \,|\, \|x - y\| < \varepsilon \,\}$$

در واقع $B_\varepsilon(x)$ عبارتست از تمام اعضایی از $\mathbb{R}^n$ که فاصله‌شان از x کمتر از ε باشد.



شکل۶-۱: نمایش گوی سه بعدی

به‌طور نمادین در شکل فوق یک همسایگی به شعاع r از یک $x \in \mathbb{R}^3$ را نمایش داده‌ایم. عنوان گوی به‌خاطر شهودی است که ما از فضای سه بعدی اطرافمان داریم و در فضاهای با بعد بالاتر، بعد همسایگی‌ها نیز از ابعاد یک گوی سه بعدی بیشتر خواهد بود اما در هر حال به آنها نیز عنوان گوی اطلاق می‌شود.

تعریف ۲۱-۱: مجموعه $A \subseteq \mathbb{R}^n$ یک مجموعه باز نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x \in A$ یک $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری که $B_\varepsilon(x) \subseteq A$ است.

این تعریف، مشابه تعریفی است که در مورد $\mathbb{R}$ انجام دادیم با این تفاوت که در مورد $\mathbb{R}$ برای یافتن تصوری شهودی از یک همسایگی باز به حرکت در دو طرف یک نقطه اشاره کردیم اما در مورد فضاهای با بعد بیشتر همان منطق با شرط حرکت در جهت‌های بی‌شمار برقرار است. یعنی در اینجا باید گفت برای هر $x \in A$ یک فاصله مناسبی وجود دارد که به اندازه آن فاصله از هر جهتی که از x دور شویم هنوز در مجموعه‌ی A هستیم و این به‌معنای باز بودن A است.

تعریف ۲۲-۱: مجموعه $A \subseteq \mathbb{R}^n$ را بسته گوییم هرگاه متمم آن در $\mathbb{R}^n$ باز باشد به‌عبارت دیگر $\mathbb{R}^n \backslash A = \{x \in \mathbb{R}^n | x \notin A\}$ باز باشد.

تعریف ۲۳-۱: مجموعه $A \subseteq \mathbb{R}^n$ کراندار نامیده می‌شود هرگاه عدد حقیقی متناهی و مثبتی چون a وجود داشته باشد که برای هر $x \in A$ داشته باشیم $\|x\| < a$.

توجه داشته باشید که $\|x\|$ یک عدد حقیقی است و اندازه همه مؤلفه‌های x در شکل‌گیری $\|x\|$ دخیل است. بنابراین وقتی که به ازای یک عدد حقیقی متناهی مثل a نرم x از a کوچک‌تر می‌شود این عمل تضمین می‌کند که هیچ‌کدام از مؤلفه‌های x از یک مقدار متناهی بزرگ‌تر نیستند. بنابراین می‌توانیم بگوییم تمامی ابعاد و مؤلفه‌های x متناهی‌اند. به‌عبارت دیگر متناهی بودن x معادل متناهی بودن تمامی مؤلفه‌های آن می‌باشد.

مثال ۱۳-۱: کره‌ی به شعاع ۱ یک مجموعه کراندار است، زیرا کره به شعاع ۱ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S^2 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1 \}$$

به‌عبارت دیگر S^2 مجموعه نقاطی از $\mathbb{R}^3$ است که نرمشان برابر ۱ است ($\|x\| = 1$) بنابراین اندازه این نقاط محدود به حدی متناهی است، پس طبق تعریف این مجموعه یک مجموعه متناهی در فضای ۳ بعدی است.

حال به سراغ تعریف اساسی دیگری می‌رویم.

تعریف ۲۴-۱: مجموعه $X \subseteq \mathbb{R}^n$ را فشرده گوییم هرگاه بسته و کراندار باشد.

مثال ۱۴-۱ : $[0,1]$ در $\mathbb{R}$ فشرده است.

بسته بودن $[0,1]$ را قبلا در مثال ۷-۱ دیدیم. کراندار بودن آن نیز به‌وضوح قابل مشاهده است، زیرا تمام اعضای آن متناهی‌اند و از هر عدد بزرگ‌تر از یک کوچک‌تر و از هر عدد منفی (مثلا -1) بزرگ‌ترند. بنابراین هم کران بالا دارند و هم کران پایین. پس $[0,1]$ مجموعه‌ای فشرده است.

مفهوم فشردگی را به‌صورت کلی‌تری نیز می‌توان بیان کرد، به‌طوری که بتوان آن را به فضاهای غیر از $\mathbb{R}^n$ نیز تعمیم داد. این تعریف با استفاده از مفهوم پوشش باز صورت می‌گیرد.

تعریف ۲۵-۱: دسته‌ای از مجموعه‌های باز که اجتماعشان شامل مجموعه‌ای چون X باشد را یک پوشش باز برای X می‌نامیم. به‌عبارت دیگر $U = \{u_\alpha | \alpha \in I\}$ یک پوشش باز برای X است هرگاه به ازای هر $\alpha \in I$ ، u_α یک مجموعه باز باشد و همچنین داشته باشیم $X \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} u_\alpha$.

مثال ۱۵-۱: مجموعه $U = \{ (\frac{1}{n}, 1) | n \in \mathbb{N}\}$ یک پوشش باز برای $(0,1)$ می‌باشد.