

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
وَصَلَّى اللَّهُ عَلَى مُحَمَّدٍ وَآلِهِ الطَّاهِرِينَ

تقدیم به نوه عزیزم نیکان بقالیان

پژوهش عملیاتی

تألیف:

دکتر فریدون اهرابی



اُنیْشَرَات
دانشگاه امام صادق علیه السلام

عنوان: پژوهش عملیاتی

مؤلف: دکتر فریدون اهرابی

ناشر: دانشگاه امام صادق علیه السلام

صفحه آرا و ویراستار ادبی و طراح جلد: محمد روشنى

نمایه ساز و ناظر نسخه پردازی و چاپ: رضا دبیا

چاپ و صحافی: چاپ سپیدان

چاپ اول: ۱۳۹۹

قیمت: ۹۳۰/۰۰۰ ریال

شماره گان: ۱۰۰۰ نسخه

شابک: ۹۷۸-۶۰۰-۲۱۴-۸۳۰-۸

فروشگاه مركزی: تهران: خیابان انقلاب، بین خیابان فخر رازی و خیابان دانشگاه، مجتمع پارسا، همکف، واحد ۲
تلفن: ۰۶۹۷۳۲۱۲

فروشگاه کتاب صادق: تهران: بزرگراه شهید چمران، پل مدیریت، ضلع شمالی دانشگاه

صندوق پستی ۱۵۹-۰۱۴۶۵۵-۱۵۹ کد پستی: ۰۱۴۶۵۹۴۳۶۸۱ تلفکس: ۸۸۳۷۰۱۴۲

E-mail: pub@isu.ac.ir • www.ketabesadiq.ir

سرنشاسه: اهرابی، فریدون، ۱۳۹۰-

عنوان و نام پدیدآور: پژوهش عملیاتی / تالیف فریدون اهرابی

مشخصات نشر: تهران: دانشگاه امام صادق (ع)، ۱۳۹۹.

مشخصات ظاهری: ۶۲۰ ص.

شابک: ۹۷۸-۶۰۰-۲۱۴-۸۳۰-۸

موضوع: برنامه‌بازی خطی - راهنمای اموزشی (عالی)

موضوع: برنامه‌بازی خطی - زمان ها و تمرین ها (عالی)

موضوع: سمپکس (رنگیات) - راهنمای اموزشی (عالی)

موضوع: متبرها (ریاضیات - راهنمای اموزشی (عالی))

نسانه افروزه: دانشگاه امام صادق (ع)

ردہ پندی کنگره: ۵۷/۶

ردہ پندی دیوبین: ۵۱۹/۷۲

شماره کتابشناسی طبل: ۶۲۲۰۸۹۳

تمام حقوق محفوظ است. هیچ یکی از این کتاب بدون اجازه مکتب ناشر قابل تکثیر یا تولید مجدد به هیچ شکلی از جمله چاپ،

فتوکپی، انتشار الکترونیکی، فیلم و صدا و انتقال در فضای مجازی نمی‌باشد.

این اثر تحت پوتشن قانون حمایت از حقوق موزهان و مصنفات ایران قرار دارد.

فهرست مطالب اجمالی

سخن ناشر.....	۱۵
مقدمه	۱۷
فصل اول: برنامه‌ریزی خطی.....	۱۹
فصل دوم. روش ترسیمی حل مسائل برنامه‌ریزی خطی	۵۳
فصل سوم. روش سیمپلکس	۷۱
فصل چهار. مسئله دوگان	۱۴۳
فصل پنجم. تحلیل حساسیت.....	۱۷۷
فصل ششم. چند مثال اقتصادی.....	۲۶۷
فصل هفتم. روش سیمپلکس تجدیدنظر شده	۳۲۹
فصل هشتم. مسئله حمل و نقل	۳۴۳
فصل نهم. واگذاری	۴۰۳
فصل دهم. برنامه‌ریزی اعداد صحیح	۴۲۹
فصل یازدهم. برنامه‌ریزی غیرخطی.....	۴۵۷
فصل دوازدهم. برنامه‌ریزی پویا	۴۹۷
فصل سیزدهم. نظریه بازی‌ها	۵۲۵
فصل چهاردهم. تجزیه و تحلیل شبکه‌ها.....	۵۵۵
فصل پانزدهم. نظریه تصمیم	۵۹۷
ضمیمه: جدول نرمال استاندارد	۶۱۴
منابع و مأخذ	۶۱۵
نمایه	۶۱۷

فهرست مطالب

سخن ناشر	۱۵
مقدمه	۱۷
فصل اول: برنامه‌ریزی خطی	۱۹
مقدمه	۱۹
۱-۱. مثال‌هایی پیرامون برنامه‌ریزی خطی	۲۰
۱-۱-۱. مثال اول	۲۰
۲-۱-۱. مثال دوم	۲۲
۳-۱-۱. مثال سوم	۲۴
۴-۱-۱. مثال چهارم	۲۵
۵-۱-۱. مثال پنجم	۲۷
۶-۱-۱. مثال ششم	۲۹
۷-۱-۱. مثال هفتم	۳۱
۸-۱-۱. مثال هشتم	۳۷
۹-۱-۱. مثال نهم	۳۹
۱۰-۱-۱. مثال دهم	۴۲
تمرین‌های فصل اول	۴۵
فصل دوم، روش ترسیمی حل مسائل برنامه‌ریزی خطی	۵۳
مقدمه	۵۳
۱-۲. مثال‌هایی پیرامون حل مسائل برنامه‌ریزی خطی با روش ترسیمی	۵۳
۱-۱-۲. مثال اول	۵۳
الف) صدق قیود	۵۴

ب) پیدا کردن جواب بهین.....	۵۷
ج) ملاحظات.....	۵۹
۲-۱. مثال دوم. یک مثال مبنیم.....	۶۲
تمرین های فصل دوم.....	۶۴
فصل سوم. روش سیمپلکس	۷۱
مقدمه	۷۱
۱-۳. مبانی روش سیمپلکس	۷۱
۲-۳. روش سیمپلکس	۷۵
۳-۳. روش جبری سیمپلکس	۸۷
۴-۳. روش جدولی سیمپلکس.....	۹۱
۵-۳. حالت های خاص.....	۹۷
۱-۵-۳. بیش از یک متغیر شرایط متغیر وارد شونده را دارا باشند.....	۹۷
۲-۵-۳. بیش از یک متغیر شرایط متغیر خارج شونده را دارا باشند.....	۹۸
۳-۵-۳. تابع هدف بیکران (هیچ متغیر خارج شونده ای وجود ندارد).	۱۰۱
۴-۳. صور ذیگر مسائل برنامه ریزی خطی و راه حل آن ها.....	۱۰۳
۱-۶-۳. یک یا چند قید به صورت تساوی باشد و بقیه قیود به صورت \leq با اعداد سمت راست مشبّت	۱۰۳
الف) روش دو مرحله ای.....	۱۰۴
ب) روش M بزرگ	۱۰۸
۲-۶-۳. یک یا چند قید دارای سمت راست منفی باشند (همه قیود به صورت \leq است) ..	۱۱۰
۳-۶-۳. یک یا چند قید به صورت \geq می باشند و سمت تمام قیود مشبّت است ..	۱۱۰
۴-۶-۳. به جای این که تابع هدف را ماگزینم کنیم باید آن را مینیمیم کنیم ..	۱۱۰
۵-۶-۳. یک یا چند متغیر اصلی محدودیت علامت نداشته باشند.....	۱۱۱
۷-۳. روابط بین جداول سیمپلکس یک مستله برنامه ریزی خطی	۱۱۱
ضمیمه فصل سوم.....	۱۱۸
ضمیمه ۱-۲. مطالب تکمیلی در مورد جواب های تباهیده	۱۱۸
ضمیمه ۲-۳. عملیات مقدماتی	۱۲۰
تمرین های فصل سوم	۱۲۵

فصل چهار. مسئله دوگان.....	۱۴۳
مقدمه	۱۴۳
۱-۴. دوگان مسئله برنامه‌ریزی خطی.....	۱۴۳
۲-۴. روابط بین مسئله برنامه‌ریزی خطی و دوگان آن.....	۱۴۶
۳-۴. دوگان مسائل برنامه‌ریزی خطی غیراستاندارد.....	۱۵۴
۴-۴. روش سیمپلکس دوگان.....	۱۵۹
۵-۴. تغییرات قیمت سایه.....	۱۶۱
ضمیمه فصل چهارم: مطالب تکمیلی در مورد روابط متقابل جواب‌های بهین مسئله اولیه و دوگان.....	۱۶۷
ضمیمه ۱-۴. حالت جواب بهین چندگانه برای مسئله اولیه.....	۱۶۷
ضمیمه ۲-۴. حالت جواب بهین تباهیده برای مسئله اولیه.....	۱۶۷
ضمیمه ۳-۴. روابط مسئله اولیه و دوگان.....	۱۷۰
الف) حالت عدم وجود جواب شدنی.....	۱۷۰
ب) حالت تابع هدف بیکران.....	۱۷۰
تمرین‌های فصل چهارم.....	۱۷۱
فصل پنجم. تحلیل حساسیت.....	۱۷۷
مقدمه	۱۷۷
۱-۵. تحلیل حساسیت نسبت به تغییرات b	۱۷۷
۲-۵. تحلیل حساسیت نسبت به تغییرات c	۱۸۱
۳-۵. تحلیل حساسیت نسبت به تغییرات Δ	۱۸۳
۴-۵. خلاصه روش تحلیل حساسیت.....	۱۹۲
۵-۵. اضافه شدن متغیر جدید.....	۱۹۴
۶-۵. اضافه شدن قید جدید.....	۱۹۵
۷-۵. نگرشی متفاوت به مسئله تحلیل حساسیت.....	۱۹۶
۱-۷-۵. حساسیت جواب بهین نسبت به تغییرات c	۱۹۷
۲-۷-۵. حساسیت جواب بهین نسبت به تغییرات b	۱۹۹
۸-۵. قاعده 100% در مورد ضرائب تابع هدف.....	۲۰۱
۹-۵. قاعده 100% در مورد تغییرات توأم سمت راست قیود (B_i ها).....	۲۰۶

ضمیمه فصل پنجم: تحلیل حساسیت در مسائل غیر استاندارد.....	۲۰۸
ضمیمه ۱-۵. روابط جداول سیمپلکس مسائل غیر استاندارد.....	۲۰۸
ضمیمه ۱-۱-۵. مسائلی که با سیمپلکس دوگان حل می شوند.....	۲۰۹
ضمیمه ۲-۱-۵. مسائلی که دارای چند قید به صورت تساوی می باشند و با مسئله استاندارد فرق دیگری ندارند.....	۲۱۰
ضمیمه ۳-۱-۵. مسائلی که در آن ها چند قید دارای b منفی می باشند و فرق دیگری با مسئله استاندارد ندارند.....	۲۱۱
ضمیمه ۲-۵. تحلیل حساسیت در مسائل غیر استاندارد.....	۲۱۸
ضمیمه ۱-۲-۵. مسائلی که با سیمپلکس دوگان حل می شوند.....	۲۱۸
ضمیمه ۲-۲-۵. مسائلی که دارای یک یا چند قید به صورت تساوی باشند و فرق دیگری با مسئله استاندارد Max نداشته باشند.....	۲۲۳
ضمیمه ۳-۵. مسئله ای که در آن یک یا چند قید به صورت \geq باشد و فرق دیگری با مسئله استاندارد MAX نداشته باشد.....	۲۲۹
ضمیمه ۴-۵. مسئله ای که در آن هم قید تساوی داریم و هم قید \geq و فرق دیگری با مسئله استاندارد MAX ندارد.....	۲۳۷
تمرین های فصل پنجم.....	۲۴۴
فصل ششم. چند مثال اقتصادی	۲۶۷
مقدمه	۲۶۷
۱-۱. مثال های عملی برنامه ریزی خطی	۲۶۷
۱-۱-۱. مثال اول	۲۶۷
الف) متغیر های تصمیم گیری	۲۶۸
ب) تابع هدف	۲۶۸
ج) قیود عملیاتی	۲۶۸
د) قیود غیر منفی بودن	۲۶۹
ه) مسئله برنامه ریزی خطی	۲۶۹
و) حل مسئله برنامه ریزی خطی	۲۶۹
ز) تفسیر مقادیر متغیر های کمکی	۲۷۰
ح) دوگان مسئله و تفسیر جواب بهین آن	۲۷۰

ط) تعیین محدوده مجاز برای تغییرات c, b در مثال فوق.....	۲۷۳
ی) چند مثال در مورد قاعده ۰/۱۰۰ ک) تحلیل حساسیت وقتی سوددهی یک روش عوض می شود..... ل) تحلیل حساسیت وقتی مقدار یک ماده اولیه تغییر می کند	۲۷۶ ۲۸۰ ۲۸۱
م) تحلیل حساسیت وقتی تکنولوژی تولید تغییر می کند..... ن) تحلیل حساسیت وقتی یک روش تولید جدید ابداع می شود..... س) تحلیل حساسیت وقتی یک قید جدید اضافه شود..... ع) تحلیل حساسیت وقتی یک قید حذف می شود.....	۲۸۳ ۲۸۶ ۲۸۸ ۲۹۰
ف) تحلیل حساسیت وقتی ماتریس تکنولوژی تغییر می کند (نه فقط یک ستون آن) ص) تحلیل حساسیت وقتی یک «پایه» جدول نهایی اصلاح شده از بین می روید	۲۹۱ ۲۹۳
۲-۱-۶. مثال دوم..... الف) متغیرهای تصمیمگیری	۲۹۶ ۲۹۶
ب) تابع هدف..... ج) قیود عملیاتی	۲۹۶ ۲۹۶
د) قیود غیر منفی بودن	۲۹۷
ه) مسئله برنامه ریزی خطی..... و) حل مسئله برنامه ریزی خطی.....	۲۹۷ ۲۹۷
ز) دوگان مسئله و تفسیر جواب بهین آن..... ح) تحلیل حساسیت	۲۹۸ ۳۰۰
ط) محدوده مجاز برای a (حداقل ویتامین I)..... ی) اضافه شدن یک ماده غذایی جدید.....	۳۰۲ ۳۰۳
۳-۱-۶. مثال سوم..... الف) متغیرهای تصمیمگیری	۳۰۶ ۳۰۶
ب) تابع هدف..... ج) قیود عملیاتی	۳۰۷ ۳۰۷
د) قیود غیر منفی بودن	۳۰۷
ه) مسئله برنامه ریزی خطی	۳۰۷
ز) دوگان مسئله و تفسیر جواب بهین آن	۳۰۸

ح) تحلیل حساسیت.....	۳۱۰
۴-۱-۶. مثال چهارم.....	۳۱۱
تمرین‌های فصل ششم.....	۳۱۷
فصل هفتم. روش سیمپلکس تجدیدنظرشده.....	۳۲۹
مقدمه.....	۳۲۹
۱-۷. مبنای روش سیمپلکس تجدیدنظرشده.....	۳۲۹
۱-۱-۷. مثال اول.....	۳۲۹
۲-۱-۷. مثال دوم.....	۳۳۷
تمرین‌های فصل هفتم.....	۳۴۲
فصل هشتم. مسئله حمل و نقل.....	۳۴۳
مقدمه.....	۳۴۳
۱-۸. روش سیمپلکس حمل و نقل.....	۳۴۳
۱-۱-۸. اصول روش سیمپلکس حمل و نقل.....	۳۴۶
۲-۱-۸. روش‌های مختلف پیداکردن جواب اولیه در سیمپلکس حمل و نقل.....	۳۶۳
الف) روش «دیمی».....	۳۶۳
ب) روش گوشش شمال غربی.....	۳۶۵
ج) روش کمترین هزینه.....	۳۶۵
د) روش تقریب فوگل.....	۳۶۵
۳-۱-۸. حالت‌های خاص در سیمپلکس حمل و نقل.....	۳۷۲
الف) جواب‌های تباہیده.....	۳۷۲
ب) جواب بهین چندگانه.....	۳۷۷
۴-۱-۸. مسائل غیرمتوازن حمل و نقل.....	۳۸۰
۵-۱-۸. تحلیل حساسیت در مسئله حمل و نقل.....	۳۸۱
الف) تغییرات هزینه‌های واحد.....	۳۸۲
ب) تغییر عرضه یا تقاضا.....	۳۸۶
۶-۱-۸. مسئله حمل و نقل مرکب.....	۳۹۳
۷-۱-۸. مسائل خاص حمل و نقل.....	۳۹۸
تمرین‌های فصل هشتم.....	۳۹۹

فصل نهم. واگذاری.....	۴۰۳
مقدمه	۴۰۳
۱-۹. واگذاری	۴۰۳
۱-۹. مسئله ریاضی مربوط.....	۴۰۴
الف) متغیرهای تصمیم‌گیری.....	۴۰۴
ب) تابع هدف.....	۴۰۴
ج) قیود	۴۰۴
د) مسئله ریاضی	۴۰۵
۲-۹. روش مجارستانی.....	۴۰۷
۳-۹. جواب‌های چندگانه.....	۴۱۴
۴-۹. مسئله واگذاری غیرمتوازن	۴۱۵
۵-۹. تحلیل حساسیت.....	۴۱۹
الف) تغییرات هزینه واحد مرتعهایی که مقدار بهین آنها صفر می‌باشد.....	۴۲۰
ب) تغییرات هزینه واحد مرتعهایی که مقدار بهین آنها یک می‌باشد.....	۴۲۴
تمرین‌های فصل نهم.....	۴۲۶
فصل دهم. برنامه‌ریزی اعداد صحیح	۴۲۹
مقدمه	۴۲۹
۱-۱۰. روش حل مسائل برنامه‌ریزی اعداد صحیح	۴۳۱
۲-۱۰. برنامه‌ریزی صفر و یک	۴۴۰
۳-۱۰. برش	۴۴۸
۴-۱۰. حل مسئله فروشندۀ دوره‌گرد از طریق تقسیم و تحدید	۴۵۰
تمرین‌های فصل دهم	۴۵۴
فصل یازدهم. برنامه‌ریزی غیرخطی	۴۵۷
مقدمه	۴۵۷
۱-۱۱. مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی	۴۵۷
۱-۱۱. مثال اول	۴۵۸
الف) متغیرهای تصمیم‌گیری	۴۵۸
ب) تابع هدف.....	۴۵۹

ج) قیود عملیاتی.....	۴۵۹
د) قیود غیر منفی بودن.....	۴۵۹
۲-۱. مبانی حل مسائل برنامه ریزی غیر خطی.....	۴۶۲
۱-۲-۱۱. مثال اول.....	۴۶۲
۲-۲-۱۱. مثال دوم.....	۴۶۴
۳-۲-۱۱. مثال سوم.....	۴۶۵
۱۱-۳. بهینه سازی تابع چند متغیره.....	۴۶۶
۱-۳-۱۱. مثال اول.....	۴۶۶
۲-۳-۱۱. مثال دوم.....	۴۶۸
۱۱-۴. روش های تقریبی پیدا کردن نقاط بحرانی.....	۴۷۰
۱-۴-۱۱. مثال اول.....	۴۷۰
۱۱-۵. روش نیوتن برای توابع چند متغیره.....	۴۷۲
۱۱-۶. بهینه سازی مقید.....	۴۷۳
۱-۶-۱۱. مثال اول.....	۴۷۳
۲-۶-۱۱. مثال دوم.....	۴۷۴
۷-۱۱. حالت چند متغیره.....	۴۷۵
۱-۷-۱۱. مثال اول.....	۴۷۵
۲-۷-۱۱. مثال دوم.....	۴۷۵
۱۱-۸. مسئله در حالت کلی.....	۴۷۸
۱-۸-۱۱. مثال اول.....	۴۷۹
۲-۸-۱۱. مثال دوم.....	۴۸۳
ضمیمه فصل یازدهم.....	۴۸۶
ضمیمه ۱-۱۱. توابع محدب.....	۴۸۶
الف) توابع یک متغیره.....	۴۸۶
ب) توابع چند متغیره.....	۴۹۱
تمرین های فصل یازدهم.....	۴۹۴
فصل دوازدهم. برنامه ریزی پویا.....	۴۹۷
مقدمه.....	۴۹۷

۴۹۷.....	۱-۱۲. مثال‌هایی از برنامه‌ریزی پویا.....
۴۹۷.....	۱-۱-۱۲. مثال اول: مسئله دلیجان.....
۵۰۱.....	۲-۱-۱۲. مثال دوم.....
۵۰۴.....	۳-۱-۱۲. مثال سوم: مسئله کوله‌پشتی.....
۵۰۸.....	۴-۱-۱۲. مثال چهارم.....
۵۱۰.....	۵-۱-۱۲. مثال پنجم.....
۵۲۲.....	تمرین‌های فصل دوازدهم.....
۵۲۵.....	فصل سیزدهم. نظریه بازی‌ها
۵۲۵.....	مقدمه.....
۵۲۶.....	۱-۱۳. مبانی نظری بازی دونفره مجموع صفر.....
۵۲۶.....	۱-۱-۱۳. مثال اول: سنگ، کاغذ و قیچی.....
۵۲۹.....	۲-۱۳. استراتژی‌های مرکب.....
۵۳۱.....	۱-۲-۱۳. انتخاب استراتژی مرکب بهین.....
۵۳۲.....	۲-۲-۱۳. استراتژی بهین بازیکن ۱.....
۵۳۵.....	۳-۲-۱۳. استراتژی بهین بازیکن ۲.....
۵۳۷.....	۴-۲-۱۳. حل بازی سنگ، کاغذ، قیچی.....
۵۴۰.....	۵-۲-۱۳. حل بازی‌های 2×2 با روش ترسیمی.....
۵۴۰.....	الف) استراتژی بهین ۱.....
۵۴۲.....	ب) استراتژی بهین ۲.....
۵۴۴.....	ج) حل بازی‌های $n \times 2$ و $2 \times m$ با روش ترسیمی.....
۵۴۴.....	د) استراتژی بهین بازیکن ۱.....
۵۴۶.....	ه) استراتژی بهین ۲.....
۵۵۱.....	۶-۲-۱۳. حل بازی‌های $m \times 2$
۵۵۲.....	تمرین‌های فصل سیزدهم.....
۵۵۵.....	فصل چهاردهم. تجزیه و تحلیل شبکه‌ها
۵۵۵.....	مقدمه.....
۵۵۵.....	۱-۱۴. مسئله کوتاه‌ترین مسیر.....
۵۵۵.....	۱-۱-۱۴. مثال اول.....

۵۶۲.....	۲-۱-۱۴. مثال دوم
۵۶۷.....	۲-۱۴. مسئله حداقل درخت در برگیرنده
۵۶۷.....	۱-۲-۱۴. مثال اول
۵۷۰.....	۳-۱۴. مسئله حداکثر جریان
۵۷۰.....	۱-۳-۱۴. مثال اول
۵۷۵.....	۲-۳-۱۴. مثال دوم
۵۷۷.....	۴-۱۴. کنترل پروژه با روش PERT و CPM
۵۷۷.....	۱-۴-۱۴. مثال اول
۵۸۴.....	۵-۱۴. روش کنترل پروژه PERT
۵۸۹.....	تمرین‌های فصل چهاردهم
۵۹۷.....	فصل پانزدهم. نظریه تصمیم
۵۹۷.....	مقدمه
۵۹۷.....	۱-۱۵. مبانی نظریه تصمیم
۵۹۸.....	۱-۱-۱۵. ضوابط تصمیم‌گیری
۵۹۸.....	الف) ضابطه Maximin
۵۹۸.....	ب) ضابطه Maximax
۵۹۹.....	ج) ضابطه Minimax پشیمانی
۶۰۰.....	د) ضابطه حداکثر درست‌نمایی
۶۰۰.....	ه) ضابطه امید ریاضی (قاعده بیز)
۶۰۱.....	۲-۱-۱۵. تصمیم‌گیری با آزمایش
۶۰۳.....	۳-۱-۱۵. ارزش آزمایش
۶۰۵.....	۴-۱-۱۵. نمودار درختی تصمیم‌گیری
۶۰۵.....	الف) محاسبه احتمالات پسین
۶۰۵.....	ب) پیدا کردن تصمیم بهین
۶۱۱.....	تمرین‌های فصل پانزدهم
۶۱۴.....	تصمیمه: جدول نرمال استاندارد
۶۱۵.....	منابع و مأخذ
۶۱۷.....	نمایه

«بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ»
وَلَقَدْ أَتَيْنَا دَأْوُودَ وَسَلِيمَنَ عِلْمًا وَقَالَا حَمْدًا لِلَّهِ الَّذِي
فَضَلَّنَا عَلَىٰ كَثِيرٍ مِنْ عِبَادِهِ الْمُؤْمِنِينَ
(قرآن کریم، سوره مبارکه لمعلق، آیه شریفه ۱۵)

سخن ناشر

رسالت و مأموریت دانشگاه امام صادق (ع) «تولید علوم انسانی اسلامی» و «تریتی نیروی درجه یک برای نظام» (که در راهبردهای ابلاغی مقام معظم رهبری مدظله تعیین شده) است. اثرپذیری علوم انسانی از مبانی معرفتی و نقش معارف اسلامی در تحول علوم انسانی، دانشگاه را بر آن داشت که به طراحی نو و باز مهندسی نظام آموزشی و پژوهشی جهت پاسخگویی به نیازهای نوظهور انقلاب، نظام اسلامی، و تربیت اسلامی به عنوان یک اصل محوری برای تحقق مأموریت خویش پردازد و بر این باور است که علم توأم با تزکیه نفس می‌تواند هویت جامعه را متاثر در مسیر تعالی و رشد قرار دهد.

از این حیث «تریتی» را می‌توان مقوله‌ای محوری یاد نمود که وظایف و کارویژه‌های دانشگاه، در چارچوب آن معنا می‌یابد؛ زیرا که «علم» بدون «ترکیه» بیش از آنکه ابزاری در مسیر تعالی و اصلاح امور جامعه باشد، عاملی مشکل‌ساز خواهد بود که سازمان و هویت جامعه را متاثر و دگرگون می‌سازد.

از سوی دیگر «سیاست‌ها» تابع اصول و مبادی علمی هستند و نمی‌توان منکر این تجربه تاریخی شد که استواری و کارآمدی سیاست‌ها در گرو انجام پژوهش‌های علمی و بهرمندی از نتایج آنهاست. از این منظر پیشگامان عرصه علم و پژوهش، راهبران اصلی جریان‌های فکری و اجرایی به حساب می‌آیند و نمی‌توان آینده درخشانی را بدون توانایی‌های علمی - پژوهشی رقم زد و سخن از «مرجعیت علمی» در واقع پاسخ‌گویی به این نیاز بنیادین است.

دانشگاه امام صادق (ع) درواقع یک الگوی عملی برای تحقق ایده دانشگاه اسلامی در شرایط

جهان معاصر است. الگویی که هم اکنون ثمرات نیکوی آن در فضای ملی و بین‌المللی قابل مشاهده است. طبعاً آنچه حاصل آمده محصول نیت خالصانه و جهاد علمی مستمر مجموعه بنیان‌گذاران و دانش‌آموختگان این نهاد است که امید می‌رود با انکاء به تأییدات الهی و تلاش همه‌جانبه اساتید، دانشجویان و مدیران دانشگاه، بتواند به مرجعی تمام عیار در گستره جهانی تبدیل گردد.

معاونت پژوهشی دانشگاه امام صادق (ع) با توجه به شرایط، امکانات و نیازمندی جامعه در مقطع کوتني با طرحی جامع نسبت به معرفی دستاوردهای پژوهشی دانشگاه، ارزیابی سازمانی - کارکردی آن‌ها و بالاخره تحلیل شرایط آتی اقدام نموده که نتایج این پژوهش‌ها در قالب کتاب، گزارش، نشریات علمی و... تقدیم علاقه‌مندان می‌گردد. هدف از این اقدام - ضمن قدردانی از تلاش خالصانه تمام کسانی که با آرمان و اندیشه‌ای بزرگ و ادعایی اندک در این راه گام نهادند - درک کاستی‌ها و اصلاح آن‌ها است تا از این طریق زمینه پرورش نسل جوان و علاقه‌مند به طی این طریق نیز فراهم گردد؛ هدفی بزرگ که در نهایت مرجعیت مکتب علمی امام صادق (ع) را در گستره بین‌المللی به همراه خواهد داشت (انشاء الله).

ولله الحمد

معاونت پژوهشی دانشگاه

مقدمه

تقریباً بیست سال پیش، پس از چند سال تدریس «پژوهش عملیاتی» به دانشجویان حسابداری و مدیریت در سطوح کارشناسی و کارشناسی ارشد کتاب «پژوهش عملیاتی (۱)» را تألیف کردم. انگیزه من برای این کار فقدان کتابی در این زمینه به زبان فارسی بود که مطالب را با استدلال ریاضی عرضه نموده باشد. در آن زمان برنامه آینده‌ای برای تألیف جلد دوم داشتم که فرصت‌ها مثل ابرآمدند و گذشتند و این کار انجام نشد. از طرف دیگر بازخورد مدرسین این درس در مورد جلد اول این بود که دانشجویان علوم انسانی فاقد زمینه لازم برای دریافت استدلال‌های ریاضی عرضه شده می‌باشند. تجربه شخصی من نیز در کلاس‌های درس این موضوع را تأیید می‌کرد.

مشکل اصلی به استدلال ریاضی روش سیمپلکس برمی‌گردد. مرحوم لیبرمن در کتاب درسی پرطرفلار خود که اولین بار در سال ۱۹۶۷ میلادی چاپ شده و اینکه به چاپ نهم رسیده است، از خواص پیشرفته مجموعه‌های محدب آن هم فقط در حد اشاره به آن‌ها به طور گذرا استفاده کرده است. با توجه به این‌که ناحیه جواب‌های شدنی یک مستله برنامه‌ریزی خطی مجموعه محدب خاصی می‌باشد، به طوری که از ترکیب خطی رئوس آن تشکیل شده است، احتیاجی به استفاده از خواص پیشرفته مجموعه‌های محدب نمی‌باشد و من در جلد اول مذکور از ریاضیات ساده‌تری استفاده کردم.

در طول تدریس در این سال‌ها دنبال روشی بودم که برای دانشجویان علوم انسانی که مخاطب اصلی کتاب بودند قابل فهم تر باشد. این روش را پیدا کردم که در آن فقط از ریاضیات دستگاه معادلات خطی همزمان استفاده می‌شود. بدین ترتیب جهت عرضه این روش جدید، کتاب حاضر را تألیف کرده‌ام که به جای جلد دوم در حقیقت کل پژوهش عملیاتی لازم برای دانشجویان حسابداری و مدیریت و سایر رشته‌های علوم انسانی می‌باشد.

از دیگر مزایای این کتاب پرداختن به جواب‌های تباهیده و تأثیر آن‌ها بر تحلیل حساسیت و

قیمت‌های سایه می‌باشد که در کتب فارسی و حتی در لیبرمن در این حد به آن‌ها بخاء داده نشده است. معذالک مطمئن هستم این کتاب عاری از کاستی نیست و امیدوارم مدرسین و استادان و دانشجویان این کاستی‌ها را گوشزد نمایند. از دانشگاه امام صادق (ع) و بالاخص از استاد محترم جناب آقای دکتر صادقی شاهدانی رئیس دانشکده اقتصاد برای توصیه‌های دقیق و به‌جا تشكیر می‌نمایم.

فریدون اهرابی

عضو هیئت علمی بازنشسته دانشکده حسابداری نفت

فصل اول

برنامه‌ریزی خطی

مقدمه

پژوهش عملیاتی شاخه‌ای از ریاضیات کاربردی است که به مسئله تخصیص بهینه منابع می‌پردازد. همان‌طوری که می‌دانیم استفاده بهینه از منابع در هر کسب و کاری از الزامات می‌باشد و در غیاب

آن هزینه‌های زیادی صرف می‌شود بدون این‌که درآمد یا سود بهینه حاصل شود.

در عین حال، کاربرد این رشته منحصر به این مورد نمی‌باشد و فی الواقع اولین کاربرد آن در جنگ جهانی دوم بود که متفقین گروهی از دانشمندان را مأمور انجام تحقیقات در مورد استفاده بهینه از منابع محدود نمودند و به عقیده صاحب‌نظران، پیروزی انگلیس در نبرد معروف هوایی بریتانیا، مديون این پژوهش‌ها بود. وجه تسمیه پژوهش عملیاتی همین پژوهش در مورد عملیات نظامی بوده است.

پس از جنگ این دانشمندان بر استفاده از همین روش‌های به کار برده در سازمان‌های تجاری صنعتی بازرگانی و دولتی و غیره متمرکز شدند و این باعث پیشرفت سریع این رشته شد.

شاخص‌ترین این پیشرفت‌ها، ابداع الگوریتم سیمپلکس برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی توسط آقای دانتزیگ در سال ۱۹۴۷ بود که هنوز بهترین روش حل چنین مسائل می‌باشد.

برنامه‌ریزی خطی قسمت اعظم پژوهش عملیاتی است که ما در هفت فصل اول این کتاب به آن می‌پردازیم.

در این فصل مسائل برنامه‌ریزی خطی را با مثال‌های متتنوع معرفی می‌نماییم:

۱-۱. مثال‌هایی پیرامون برنامه‌ریزی خطی

۱-۱-۱. مثال اول

در کارخانه منصف و پسaran برای تولید یک محصول نهایی دو روش تولید وجود دارد و از سه نوع ماده اولیه مختلف استفاده می‌شود. در جدول زیر مقادیر لازم از هر ماده اولیه برای تولید یک واحد محصول نهایی برای هر روش تولید، سود واحد هر روش تولید و همچنین مقدار موجود از هر ماده اولیه آمده است با فرض ثابت بودن نسبت بین مقادیر مواد اولیه لازم برای تولید هر مقدار محصول نهایی با هر روش و همچنین با فرض ثابت بودن نسبت مقدار هر ماده اولیه به مقدار محصول نهایی می‌خواهیم بدانیم چند واحد باید با هر روش تولید کنیم تا سود کل ماکزیمم شود.

مقدار ماده اولیه	روش تولید		
	II	I	ماده اولیه
۲۴	۶	۳	۱
۶	۰	۱	۲
۳	۱	۰	۳
	۴	۱۵	سود واحد

حل: برای حل مسئله باید ابتدا آن را به صورت یک مسئله ریاضی درآوریم. برای این کار مجهول‌های مسئله را معین می‌کنیم. در درس برنامه‌ریزی خطی این مجهول‌ها را متغیرهای تصمیم‌گیری می‌نامند. در این مثال متغیرهای تصمیم‌گیری عبارتند از:

تعداد واحد محصول نهایی که با روش I تولید می‌شود: x_1

تعداد واحد محصول نهایی که با روش II تولید می‌شود: x_2

حال باید ضابطه تعیین x_1 و x_2 را به دست آوریم. در این مثال ضابطه حداکثرکردن سود می‌باشد. پستابع سود را تعیین می‌کنیم. این تابع

$$\pi = 4x_1 + 15x_2$$

می‌باشد که با توجه به مقادیر سود واحد به دست آمده است. این تابع را تابع هدف می‌نامند.

حال واضح است که ما آزاد نیستیم x_1 و x_2 را به دلخواه تعیین کنیم، بلکه با توجه به محدودیت موجودی مواد اولیه باید بینیم این متغیرها چه مقادیری را می‌توانند اختیار کنند. برای هر ماده اولیه با توجه به محدودیت موجودی یک نامساوی به دست می‌آید.

ماده اولیه ۱: با توجه به این‌که می‌خواهیم x_1 واحد محصول نهایی با روش I تولید کنیم و با در نظر گرفتن این‌که در روش I برای هر واحد محصول نهایی ۳ واحد ماده اولیه ۱ لازم است و چون نسبت بین مقدار ماده اولیه ۱ و مقدار محصول نهایی در هر روش ثابت است پس برای تولید x_1 واحد محصول نهایی با روش I تعداد $3x_1$ از ماده اولیه ۱ لازم است. با همین استدلال برای تولید x_2 واحد محصول نهایی با روش II مقدار $6x_2$ از ماده اولیه ۱ لازم است، پس کل ماده اولیه ۱ لازم:

$$3x_1 + 6x_2$$

می‌باشد حال با توجه به این‌که ۲۴ واحد ماده اولیه ۱ داریم نامساوی زیر به دست می‌آید:

$$3x_1 + 6x_2 \leq 24 \quad (1)$$

ماده اولیه ۲: با استدلالی شبیه آنچه در مورد ماده اولیه ۱ به کار بردهیم نامساوی زیر را خواهیم داشت:

$$2x_1 \leq 6 \quad (2)$$

ماده اولیه ۳: و برای ماده اولیه ۳ نامساوی زیر را خواهیم داشت:

$$3x_2 \leq 3 \quad (3)$$

نامساوی‌های (1) و (2) و (3) را قیود عملیاتی می‌نامند.

آخرین مطلبی که باید در نظر داشت این است که x_1 و x_2 نمی‌توانند منفی باشند، پس دو قید زیر را نیز باید در نظر بگیریم.

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \quad (4)$$

این قیود را قیود غیرمنفی بودن می‌نامند.

بدین ترتیب مسئله ریاضی که باید حل کنیم به صورت زیر می‌باشد:

x_1 و x_2 را طوری تعیین کنید که در قیود (1) و (2) و (3) و (4) صدق کنند و π بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

این مسئله را به زبان ریاضی به صورت زیر می‌نویسند:

$$\max \pi = 4x_1 + 15x_2$$

$$s.t \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 \leq 24 \\ x_1 \leq 6 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

این یک مسئله برنامه‌ریزی خطی است که مثالی از یک مسئله استاندارد ماگزینم می‌باشد که در فصل بعدی با حل آن‌ها آشنا خواهیم شد.

۱-۱-۲. مثال دوم^۱

کدبانویی می‌خواهد حداقل ویتامین روزانه لازم برای خانواده خود را با خرید سه ماده غذایی تأمین کند. هر واحد از این سه ماده دارای مقادیری از ویتامین ۱ و ۲ می‌باشند که در جدول زیر آمده است. همچنین حداقل ویتامین روزانه لازم و قیمت هر واحد مواد غذایی در این جدول آمده است. این کدبانو از هر ماده غذایی چند واحد باید خریداری کند تا با حداقل هزینه ممکن حداقل ویتامین‌های لازم روزانه را تأمین نماید:

حداقل ویتامین روزانه	۳	۲	۱	ماده غذایی ویتامین
۱۰۰	۱	۲	۳	I
۲۰۰	۲	۴	۵	II
	۸	۱۵	۱۲	قیمت واحد

فرموله کردن مسئله:

الف) متغیرهای تصمیم‌گیری:

مقداری که باید از ماده غذایی ۱ بخرد: x_1

مقداری که باید از ماده غذایی ۲ بخرد: x_2

مقداری که باید از ماده غذایی ۳ بخرد: x_3

۱. معروف به مسئله Diet (برنامه غذایی) است که شبیه اولین مسئله‌ای است که با روش سیمپلکس توسط دانتزیگ حل شده است (Dantzig, George B. 1963 New Jersey).

ب) قیود عملیاتی

با توجه به حداقل ویتامین روزانه لازم قیود عملیاتی زیر را به دست می‌آوریم:

$$I \geq 100 \quad \text{مقدار ویتامین } I$$

حال با توجه به این‌که هر واحد ماده غذایی ۱ دارای ۳ واحد ویتامین I می‌باشد، پس در x_1 واحد ماده غذایی ۱ مقدار $3x_1$ ویتامین I داریم. به همین ترتیب در x_2 واحد ماده غذایی ۲ تعداد $2x_2$ ویتامین I داریم و بالاخره در x_3 واحد ماده غذایی ۳ تعداد x_3 ویتامین I داریم؛ لذا قید زیر به دست می‌آید:

$$(1) \quad 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 100$$

با همین استدلال قید زیر برای ویتامین II به دست می‌آید:

$$(2) \quad 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 200$$

ج) قیود غیرمنفی بودن:

واضح است که باید داشته باشیم:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$

د) تابع هدف

هدف کدبانو حداقل نمودن هزینه (با توجه به قیود فوق) است. پس تابع هدف همان هزینه خرید این مواد غذایی است. یعنی:

$$C = 12x_1 + 15x_2 + 8x_3$$

تابع هدف ما می‌باشد.

ه) مسئله برنامه‌ریزی خطی

با توجه به توضیحات فوق مسئله برنامه‌ریزی خطی مربوطه به شکل زیر در می‌آید:

$$\min C = 12x_1 + 15x_2 + 8x_3$$

$$s.t \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 100 \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 200 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

این مسئله یک نمونه از مسئله استاندارد مینیمم برنامه‌ریزی خطی می‌باشد.

ملاحظه: در مسئله استاندارد ماگزین سمت راست قیود همگی مثبت هستند و جهت نامساوی‌ها کو در مسئله استاندارد مینیمم سمت راست قیود همگی مثبت هستند و جهت نامساوی‌ها \geq می‌باشد. ضمن آن‌که تمام متغیرها غیرمنفی می‌باشند. این تنها مشخصه مسائل استاندارد است.

۱-۱-۳. مثال سوم

حال یک مثال غیراستاندارد داریم:

شرکتی دو نوع پمپ آب هیدرولیک تولید کرده و به فروش می‌رساند (نوع بزرگ و نوع استاندارد آن). شرکت روی پمپ‌های کار انجام می‌دهد. ۱- نصب ۲- نقاشی ۳- کنترل کیفیت پمپ. ساعت کار مورد نیاز برای انجام این سه کار در جدول زیر نشان داده شده است. سود حاصل از فروش پمپ استاندارد ۵۰ هزار تومان و پمپ بزرگ ۷۵ هزار تومان است.

ظرفیت شرکت برای کار نصب ۴۸۰۰ ساعت، برای نقاشی ۱۹۸۰ ساعت و کنترل کیفیت ۹۰۰ ساعت می‌باشد. شرکت می‌خواهد حداقل ۳۰۰ پمپ استاندارد و ۱۸۰ پمپ بزرگ در هفته بفروشد. شرکت می‌خواهد بداند از هر کدام در هفته چقدر بفروشد تا سودش حداکثر شود.

کنترل کیفیت	نقاشی	نصب	نوع کار	
			نوع پمپ	استاندارد
۰/۶	۱/۶	۳/۶		
۰/۶	۱/۸	۴/۸		بزرگ

فرموله کردن مسئله:

با توجه به اطلاعات داده شده به راحتی می‌توانید مسئله برنامه‌ریزی خطی مربوط را بنویسید:

$$\max Z = 50x_1 + 75x_2$$

$$s.t \begin{cases} 3/6x_1 + 4/8x_2 \leq 4800 \\ 1/6x_1 + 1/8x_2 \leq 1980 \\ 0/6x_1 + 0/6x_2 \leq 900 \\ x_1 \geq 300 \\ x_2 \geq 180 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

که x_1 و x_2 تعداد پمپ‌های استاندارد و بزرگ می‌باشد که در یک هفته باید به فروش برسد.

۱-۱-۴. مثال چهارم

شرکتی سازنده مبلمان اداری است و دو نوع میز، میز نقشه‌کشی و میز منشی را تولید می‌کند. شرکت می‌تواند از دو روش برای ساختن میزها استفاده کند. در روش اول ۸۰ ساعت در هفته کار انجام شده و در روش دوم از تمام ظرفیت تولید استفاده نمی‌شود و ۵۰ ساعت در هفته کار انجام می‌شود. جدول زیر زمان و هزینه لازم برای تولید را در هر روش نشان می‌دهد.

قیمت میز نقشه‌کشی ۳۵۰ هزار تومان و قیمت میز منشی ۲۷۵ هزار تومان است. بودجه هفتگی برای تولید میز نقشه‌کشی ۲۰۰۰۰۰ تومان و برای میز منشی ۲۲۰۰۰۰ تومان است. مدیر می‌خواهد بداند از هر میز در هر روش در هفته چه تعداد تولید کند تا سودش حداکثر شود.

هزینه استاندارد (هزار تومان - هر واحد)		زمان لازم برای تولید (ساعت - هر واحد)		نوع کار
روش ۲	روش ۱	روش ۲	روش ۱	
۲۶۰	۲۵۰	۶	۷	میز نقشه‌کشی
۱۸۰	۲۰۰	۵	۴	میز منشی

فرموله کردن مسئله:

الف) متغیرهای تصمیم‌گیری:

تعداد میز نقشه‌کشی تولید شده به روش ۱: x_1

تعداد میز نقشه‌کشی تولید شده با روش ۲: x_2

تعداد میز منشی تولید شده با روش ۱: x_3

تعداد میز منشی تولید شده با روش ۲: x_4

ب) قیود عملیاتی:

۱) در روش ۱ در هفته ۸۰ ساعت کار انجام می‌شود، پس با توجه به این‌که برای هر میز نقشه‌کشی در این روش ۷ ساعت و برای هر میز منشی در این روش ۴ ساعت وقت لازم است، پس باید داشته باشیم:

$$7x_1 + 4x_2 \leq 80 \quad (1)$$

۲) به همین ترتیب برای روش دوم خواهیم داشت:

$$2(6x_1 + 5x_2) \leq 50$$

۳) با توجه به این که بودجه هفتگی برای میز نقشه‌کشی ۲۰۰۰۰۰۰ تومان می‌باشد و با توجه به هزینه تولید هر واحد میز نقشه‌کشی در هر روش به قيد زیر می‌رسیم:

$$3(25x_1 + 26x_2) \leq 2000$$

۴) با توجه به بودجه هفتگی ۲۲۰۰۰۰۰ تومان برای میز منشی و با توجه به هزینه تولید هر واحد میز منشی در هر روش به قيد زیر می‌رسیم:

$$4(20x_3 + 18x_4) \leq 2200$$

ج) قیود غیرمنفی بودن:

$$5(x_1, x_2, x_3, x_4) \geq 0$$

د) تابع هدف:

در اینجا هدف ماگزیمم کردن سود می‌باشد؛ لذا ابتدا باید سود واحد را برای هر میز و هر روش به دست آوریم:

$$1 = \text{سود واحد میز نقشه‌کشی در روش ۱} = 350 - 250$$

$$2 = \text{سود واحد میز نقشه‌کشی در روش ۲} = 350 - 260$$

$$3 = \text{سود واحد میز منشی در روش ۱} = 275 - 200$$

$$4 = \text{سود واحد میز منشی در روش ۲} = 275 - 180$$

تابع هدف به صورت زیر درخواهد آمد:

$$Z = 10x_1 + 9x_2 + 75x_3 + 95x_4$$

ه) مسئله برنامه‌ریزی خطی:

با توجه به تابع هدف و قیود به دست آمده و مسئله برنامه‌ریزی خطی مربوط به صورت زیر می‌باشد:

$$\max Z = 10x_1 + 9x_2 + 75x_3 + 95x_4$$

$$s.t \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \leq 80 \\ 6x_1 + 5x_4 \leq 50 \\ 25x_1 + 26x_2 \leq 2000 \\ 20x_3 + 18x_4 \leq 2200 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

ملاحظه: خواننده دقیق ممکن است در این مثال‌ها مخصوصاً مثال ۳ و ۴ لزوم عدد صحیح بودن متغیرهای تصمیم‌گیری را گوشزد کند. در برنامه‌ریزی خطی فرض بر این است که متغیرها می‌توانند هر مقداری را اختیار کنند.^۱ اگر اصرار بر عدد صحیح بودن باشد به «برنامه‌ریزی با اعداد صحیح» می‌رسیم که در فصل (۱۱) به آن خواهیم پرداخت.

۱-۱-۵. مثال پنجم

آقای حسینی یک مشاور مالی است که از او درخواست شده است برای سرمایه‌گذاری ۲ میلیارد ریال وجه بازنیستگی راه حلی ارائه دهد. او می‌تواند این مبلغ را در جاهای مختلف که در جدول زیر آمده است سرمایه‌گذاری کند. در این جدول همچنین بازده هر سرمایه‌گذاری، عامل ریسک و میانگین دوره سرمایه‌گذاری آمده است. از آقای حسینی خواسته شده است که میانگین کل دوره سرمایه‌گذاری حداقل ۵ سال و میانگین ضریب ریسک حداکثر ۰/۰۲ باشد. همچنین طبق قانون باید در صد سرمایه‌گذاری در اموال و دارایی ثابت و سهام ممتاز حداکثر ۰/۰۵ درصد از سرمایه‌گذاری کل باشد. آقای حسینی چگونه باید بازده سالانه سرمایه‌گذاری را حداکثر کند؟

نوع سرمایه‌گذاری	بازده سالانه %	ضریب ریسک	میانگین دوره سرمایه‌گذاری
پسانداز	۸/۵	۰/۰۲	۸
اوراق خزانه	۹	۰/۰۱	۲
سهام عادی	۸/۵	۰/۳۸	۵
سهام ممتاز	۱۴/۳	۰/۴۵	۶
اوراق شرکتی	۶/۷	۰/۰۷	۲
اموال و دارایی ثابت	۱۳	۰/۳۵	۳

فرموله کردن مسئله

الف) متغیرهای تصمیم‌گیری:

نسبت سرمایه‌گذاری در پسانداز به کل سرمایه: x_1

نسبت سرمایه‌گذاری در اوراق خزانه به کل سرمایه: x_2

نسبت سرمایه‌گذاری در سهام عادی به کل سرمایه: x_3

۱. می‌گوییم متغیرها Divisible (قابل تقسیم) هستند.

نسبت سرمایه‌گذاری در سهام ممتاز به کل سرمایه: x_1

نسبت سرمایه‌گذاری در اوراق شرکتی به کل سرمایه: x_2

نسبت سرمایه‌گذاری در اموال دارایی ثابت کل سرمایه: x_3

ب) قیود عملیاتی

- ۱) با توجه به این‌که کل ۲ میلیارد ریال سرمایه‌گذاری خواهد شد، اولین قید عملیاتی به صورت زیر است:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 1$$

۲) با توجه به این‌که میانگین کل دوره سرمایه‌گذاری باید از ۵ سال کمتر باشد، خواهیم داشت:

$$8x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 2x_5 + 3x_6 \geq 5$$

۳) با توجه به این‌که میانگین ضریب رسک باید بیش از $2/0$ باشد، خواهیم داشت:

$$0.2x_1 + 0.1x_2 + 0.38x_3 + 0.45x_4 + 0.07x_5 + 0.35x_6 \leq 0.2$$

۴) با توجه به این‌که حداقل 25% باید در اموال دارایی‌های ثابت و سهام ممتاز سرمایه‌گذاری شود، خواهیم داشت:

$$x_4 + x_5 \leq 0.25$$

ج) قیود غیرمنفی بودن

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

د) تابع هدف:

هدف ماکزیمم کردن بازده سرمایه‌گذاری است. پس تابع هدف به صورت زیر می‌باشد:

$$Z = \frac{1}{100} [0.85x_1 + 0.9x_2 + 0.85x_3 + 0.143x_4 + 0.067x_5 + 0.13x_6]$$

ه) مسئله برنامه‌ریزی خطی:

با توجه به مطالب فوق مسئله برنامه‌ریزی خطی به صورت زیر می‌باشد:

$$\max Z = 0.85x_1 + 0.9x_2 + 0.85x_3 + 0.143x_4 + 0.067x_5 + 0.13x_6$$

$$s.t \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 1 \\ 8x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 2x_5 + 3x_6 \geq 5 \\ 0.2x_1 + 0.1x_2 + 0.38x_3 + 0.45x_4 + 0.07x_5 + 0.35x_6 \leq 0.2 \\ x_4 + x_5 \leq 0.25 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

۱-۱-۶. مثال ششم

یک چاپخانه برای انجام کارهای خود می‌خواهد از کارگران تمام وقت استفاده کند. طبق قانون کار هر کدام از این کارگران روز هفتم کار خود تعطیل خواهد بود. اگر این چاپخانه در هر روز هفته طبق جدول زیر به تعداد کارگران موردنظر احتیاج داشته باشد چگونه باید با حداقل تعداد کارگر کار را انجام دهد؟

فرض کنید هفته اول شروع کار بتوان از کارگران روز مزد نیز استفاده نمود.

تعداد کارگر موردنیاز	روز
۱۹	شنبه
۱۶	یکشنبه
۱۵	دوشنبه
۲۱	سهشنبه
۲۲	چهارشنبه
۲۰	پنجشنبه
۱۲	جمعه

فرموله کردن مسئله:

الف) متغیرهای تصمیم‌گیری

تعداد کارگرانی که روز شنبه کار را شروع می‌کنند: x_1

تعداد کارگرانی که روز یکشنبه کار را شروع می‌کنند: x_2

تعداد کارگرانی که روز دوشنبه کار را شروع می‌کنند: x_3

تعداد کارگرانی که روز سهشنبه کار را شروع می‌کنند: x_4

تعداد کارگرانی که روز چهارشنبه کار را شروع می‌کنند: x_5

تعداد کارگرانی که روز پنجشنبه کار را شروع می‌کنند: x_6

تعداد کارگرانی که روز جمعه کار را شروع می‌کنند: x_7

ب) قیود عملیاتی:

۱) با توجه به این که روز شنبه ۱۹ کارگر لازم داریم و با توجه به این که فقط کارگرانی که روز یکشنبه شروع به کار کرده‌اند روز شنبه تعطیل هستند، خواهیم داشت:

$$x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 19$$

(۲) به همین ترتیب برای روزهای یکشنبه تا جمعه قیود زیر را خواهیم داشت:

- ۲) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 16$
- ۳) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 15$
- ۴) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 21$
- ۵) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 22$
- ۶) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 20$
- ۷) $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 12$

(ج) قیود غیرمنفی بودن:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

(د) تابع هدف:

هدف حداقل کردن تعداد کل کارگران می‌باشد؛ لذا تابع هدف

$$Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$

می‌باشد.

(ه) مسئله برنامه‌ریزی خطی:

با توجه به مطالب فوق مسئله برنامه‌ریزی خطی مربوطه به شکل زیر می‌باشد.

$$\min Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$

$$s.t (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8)$$

ملاحظه ۱: در نوشتمن قیود فرض کردہ‌ایم کارگرانی در هفته قبل مشغول کار بوده‌اند. مثلاً برای قید شنبه از این موضوع استفاده کردہ‌ایم که کارگرانی کار خود را دوشنبه هفته قبل شروع کرده‌اند (یا دوشنبه یکی از هفته‌های قبل). پس اگر هفته اول شروع کار را در نظر بگیریم این قیود دقیق نخواهد بود، زیرا نمی‌توانیم از کارگران هفته قبل استفاده کنیم. این مسئله فقط برای هفته اول وجود دارد و می‌توان از کارگران روزمزد اضافی لازم (فقط برای هفته اول) استفاده کرد.

ملاحظه ۲: در این مثال نیز واضح است که قید دیگری مبنی بر این که تمام x_i ‌ها باید عدد صحیح مثبت باشند احتیاج داریم که این فراتر از مسئله معمولی برنامه‌ریزی خطی می‌باشد و وارد دامنه برنامه‌ریزی با اعداد صحیح می‌شود.

۱-۱-۷. مثال هفتم

شرکت نفتا سه نوع بنزین تولید می‌کند (۱ و ۲ و ۳) هر نوع بنزین از ترکیب سه نوع نفت خام به دست می‌آید (۱ و ۲ و ۳) قیمت فروش هر بشکه بنزین و قیمت خرید هر بشکه نفت خام در جدول (۱) آمده است. از هر نفت خام حداکثر می‌توان ۵۰۰۰ بشکه در روز خرید. نفت خام ترکیبی که برای تولید بنزین ۱ به کار می‌رود حداقل باید دارای درجه اکتان متوسط ۱۰ باشد و حداکثر باید دارای ۶۱ سولفور باشد. برای بنزین ۲ این اعداد باید حداقل ۸ و حداکثر ۲٪ باشد و برای بنزین ۳ این اعداد باید حداقل ۶ و حداکثر ۱٪ باشد. درجه اکتان و میزان سولفور نفت‌های خام در جدول (۲) آمده است. هزینه تولید یک بشکه بنزین از یک بشکه نفت خام ۴ هزار تومان و ظرفیت پالایشگاه شرکت نفتا ۱۴۰۰۰ بشکه بنزین در روز می‌باشد. مشتریان نفتا روزانه ۳۰۰۰ بشکه بنزین ۱، ۲۰۰۰ بشکه بنزین ۲ و ۱۰۰۰ بشکه بنزین ۳ لازم دارند که نفتا خود را ملزم به تأمین این تقاضاها می‌داند. نفتا همچنین می‌تواند با تبلیغ تقاضا را بالا ببرد. هر ۱۰۰ هزار تومان هزینه روزانه تبلیغ تقاضا را روزانه ۱۰ بشکه اضافه می‌نماید. مثلاً اگر نفتا روزانه ۲ میلیون تومان برای تبلیغ بنزین ۲ هزینه کند تقاضا برای این بنزین روزانه ۲۰ بشکه افزایش می‌یابد. شرکت نفتا چگونه باید سود روزانه خود را ماگزینیم نماید (فرض کنید تولید روزانه مساوی تقاضای روزانه می‌باشد یعنی بنزین ذخیره نمی‌شود).

قیمت فروش هر بشکه	قیمت خرید
۷۰ هزار تومان	نفت خام ۱ ۴۵ هزار تومان
۶۰ هزار تومان	نفت خام ۲ ۳۵ هزار تومان
۵۰ هزار تومان	نفت خام ۳ ۲۵ هزار تومان

درجه اکتان	میزان سولفور	نفت خام
۱۲	۰٪۱۵	۱ نفت خام
۶	٪۲	۲ نفت خام
۸	٪۳	۳ نفت خام

فرموله کردن مسئله

الف) متغیرهای تصمیم‌گیری:

شرکت نفتا دو نوع تصمیم‌گیری دارد: چقدر برای هر بنزین روزانه خرج تبلیغات کند و از هر نفت خام چند بشکه روزانه برای تولید هر نوع بنزین استفاده کند، پس متغیرهای تصمیم‌گیری عبارت هستند از:

میزان هزینه تبلیغات روزانه برای بنزین i :

$i = 1, 2, 3$

میزان نفت خام (به بشکه) j روزانه که برای تولید بنزین j به کار می‌رود: y_{ij}

$i = 1, 2, 3$

$j = 1, 2, 3$

برای راحتی می‌توان این متغیرهای نوع دوم را در جدولی خلاصه کرد:

جمع				
y_{11}	y_{12}	y_{13}	نفت خام ۱ روزانه	
y_{21}	y_{22}	y_{23}	نفت خام ۲ روزانه	
y_{31}	y_{32}	y_{33}	نفت خام ۳ روزانه	
بنزین ۱		بنزین ۲		
بنزین ۳			جمع	

از این جدول در نوشتن قیود عملیاتی استفاده خواهیم کرد:

ب) قیود عملیاتی:

با توجه به نوع قیود ابتدا موضوع هر قید را ذیلاً توصیف می‌کنیم، سپس قیود را به صورت ریاضی در می‌آوریم:

قید ۱: تساوی عرضه و تقاضا برای بنزین ۱

قید ۲: تساوی عرضه و تقاضا برای بنزین ۲

قید ۳: تساوی عرضه و تقاضا برای بنزین ۳

قید ۴: محدودیت میزان خرید روزانه نفت خام ۱ (۵۰۰۰ بشکه در روز)

قید ۵: محدودیت میزان خرید روزانه نفت خام ۲ (۵۰۰۰ بشکه در روز)

قید ۶: محدودیت میزان خرید روزانه نفت خام ۳ (۵۰۰ بشکه در روز)

قید ۷: محدودیت ظرفیت پالایشگاه (۱۴۰۰۰ بشکه بنزین در روز)

قید ۸: محدودیت درجه اکتان نفت خام ترکیبی برای بنزین ۱

قید ۹: محدودیت درجه اکتان نفت خام ترکیبی برای بنزین ۲

قید ۱۰: محدودیت درجه اکتان نفت خام ترکیبی برای بنزین ۳

قید ۱۱: محدودیت میزان سولفور نفت خام ترکیبی برای بنزین ۱

قید ۱۲: محدودیت میزان سولفور نفت خام ترکیبی برای بنزین ۲

قید ۱۳: محدودیت میزان سولفور نفت خام ترکیبی برای بنزین ۳

حال قیود را به صورت ریاضی می‌نویسیم:

قید ۱: تقاضای روزانه برای بنزین ۱ = عرضه روزانه بنزین ۱

از جدول (۳) عرضه بنزین روزانه به دست می‌آید:

$$y_{11} + y_{21} + y_{31} = \text{عرضه روزانه بنزین ۱}$$

تقاضای روزانه برای بنزین ۱ را با توجه به تقاضای ثابت که ۳۰۰۰ بشکه می‌باشد و در نظر

گرفتن افزایش تقاضا در اثر تبلیغات به دست می‌آوریم:

$$y_{11} + y_{21} + y_{31} = 3000 + \frac{x_1}{100} \times 10 = 3000 + \frac{1}{10} x_1$$

پس قید ۱ به صورت زیر در می‌آید:

$$y_{11} + y_{21} + y_{31} = 3000 + \frac{1}{10} x_1$$

يعني:

$$(1) y_{11} + y_{21} + y_{31} - \frac{1}{10} x_1 = 3000$$

يعني:

قید ۲: با استدلال مشابه استدلال فرق خواهیم داشت:

$$(2) y_{12} + y_{22} + y_{32} - \frac{1}{10} x_2 = 2000$$

قید ۳: و بالاخره برای بنزین ۲ خواهیم داشت:

$$(3) y_{13} + y_{23} + y_{33} - \frac{1}{10} x_3 = 1000$$

قید ۴: با مراجعه به جدول (۳) میزان خرید روزانه نفت خام ۱:

$$y_{11} + y_{12} + y_{13}$$

می‌باشد؛ لذا قید ۴ به صورت زیر در می‌آید:

$$(4) y_{11} + y_{12} + y_{13} \leq 5000$$

قید ۵: با استدلال مشابه قید ۴ این قید به صورت زیر در می‌آید:

$$(5) y_{21} + y_{22} + y_{23} \leq 5000$$

قید ۶: و بالاخره قید مربوط به نفت خام ۳ به شکل زیر می‌باشد:

$$(6) y_{31} + y_{32} + y_{33} \leq 5000$$

قید ۷: با مراجعه به جدول (۳) کل بنزین تولیدی روزانه: